D. FILIPESCU
E. GRECU
R. MEDINȚU

MATEMATICI GENERALE
PENTRU SUBINGINERI

CULEGERE DE PROBLEME

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI—1975

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

M. ROȘCULEȚ
E. GRECU
D. FILIPESCU
R. MEDINȚU

MATEMATICI GENERALE

PENTRU SUBINGINERI

CULEGERE DE PROBLEME

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Scanned with OKEN Scanner

PREFAŢĂ

Culegerea de faţă a fost scrisă ca un auxiliar al manualului de Matematici generale pentru subingineri apărut în aceeaşi editură.

Totodată apreciem că lucrarea este deopotrivă utilă elevilor şcolilor postliceale, tuturor acelora care se pregătesc pentru concursul de admitere în învăţământul superior precum şi studenţilor anilor I de la Universitate şi Academia de studii economice.

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Bibliografie	.....	6
Cap. I.	Mulțimi. Structuri. Algebra vectorială (E. Grecu)	7
Cap. II.	Matrici. Determinanți. Sisteme de ecuații liniare. Dreapta. Planul. (E. Grecu).	33
Cap. III.	Șiruri de numere. Serii de numere. (R. Mediņțu).	75
Cap. IV.	Funcții de o singură variabilă. Limite. Continuitate. (R. Mediņțu).	97
Cap. V.	Derivate. Diferențiale. (R. Mediņțu).	113
Cap. VI.	Funcții de mai multe variabile: Limite. Continuitate. Derivate parțiale. Diferențiale. Extreme. (R. Mediņțu).	142
Cap. VII.	Funcții implicite. Dependența funcțională. (R. Mediņțu).	167
Cap. VIII.	Conice. Suprafețe riglate și de rotație. Sfera. Cuadrice. (E. Grecu).	174
Cap. IX.	Geometria diferențială a curbelor și suprafețelor. (E. Grecu).	201
Cap. X.	Integrala definită și nedefinită. (R. Mediņțu).	232
Cap. XI.	Serii de puteri. Serii Fourier. (R. Mediņțu, E. Grecu).	260
Cap. XII.	Integrale curbilinii (R. Mediņțu).....	276
Cap. XIII.	Integrale duble și de suprafață. Integrale triple. (R. Mediņțu).	287
Cap. XIV.	Ecuații diferențiale. (E. Grecu).....	311
Cap. XV.	Sisteme de ecuații diferențiale. (E. Grecu).....	350
Cap. XVI.	Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi liniare. (E. Grecu).....	365
Cap. XVII.	Elemente de teoria cîmpurilor. (D. Filipescu).	376
Cap. XVIII.	Elemente de teoria probabilităților. (D. Filipescu).	396

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă, L., Morozan, T. *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, vol.I, Editura tehnică, Buc. 1964.
2. Ciorănescu, N., Roșculeț, M. *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică*. Editura tehnică, Buc. 1958.
3. C. Ionescu Bujor, Sacter, O. *Exerciții și probleme de geometrie analitică și diferențială*, Vol. I, II, Editura didactică și pedagogică, Buc. 1963.
4. Demidovici, P. B. *Culegere de probleme și exerciții de analiză matematică*. Editura tehnică, Buc. 1956.
5. Donciu, N., Flondor, D. *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică*, vol. I, II, 1964. 1966, Editura didactică și pedagogică, Buc.
6. Gunther, N. M., Cuzmin, R. O. *Culegere de probleme de matematici superioare*. vol. I, II, Editura tehnică, Buc. 1953.
7. Iosifescu, M., Mihoc, Gh., Theodorescu, R. *Teoria probabilităților și statistica matematică*. Editura tehnică, Buc. 1966.
8. Nicolescu, M., Dinculeanu, N. Marcus, S. *Manual de analiză matematică*. vol. I, Editura didactică și pedagogică, Buc. 1963.
9. Roșculeț, M., Bucur, C., Craiu, M., Trandafir, R., Toma, M., Tofan, I. *Culegere de probleme de analiză matematică*. Editura didactică și pedagogică, Buc. 1968.
10. Sabac, Gh., I. *Matematici Speciale*. vol. I, II, Editura didactică și pedagogică, 1964 1965, Buc.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

MULȚIMI. STRUCTURI. NUMERE. ALGEBRA VECTORIALĂ

1. Se dau mulțimile

$$\mathbf{Z} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\},$$
$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$$
$$\mathbf{A}_1 = \{-2, -1, 1, 3, 5, 7\},$$
$$\mathbf{A}_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$\mathbf{A}_3 = \{-3, 0, 2, 4, 6, 8\}.$$

a) Să se arate că mulțimile $\mathbf{N}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ sînt submulțimi stricte ale mulțimii $\mathbf{Z}$.

b) Să se efectueze intersecțiile

$$\mathbf{Z} \cap \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} \cap \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 \quad \mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_1$$

c) Să se efectueze reuniunile

$$\mathbf{Z} \cup \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} \cup \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{A}_2 \cup \mathbf{A}_3, \quad \mathbf{A}_3 \cup \mathbf{A}_1$$

d) Să se găsească mulțimea $C_{\mathbf{N}}\mathbf{A}_2$ (complementara lui $\mathbf{A}_2$ în raport cu $\mathbf{N}$).

R. Deoarece

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}, \quad \mathbf{A}_1 \subset \mathbf{Z}, \quad \mathbf{A}_2 \subset \mathbf{Z}, \quad \mathbf{A}_3 \subset \mathbf{Z}$$

și mulțimea $\mathbf{Z}$ conține și alte elemente în afara elementelor din mulțimile respective, înseamnă că mulțimile $\mathbf{N}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ sînt submulțimi stricte ale lui $\mathbf{Z}$.

b) Deoarece

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}, \quad \mathbf{A}_1 \subset \mathbf{N}$$

rezultă că

$$\mathbf{Z} \cap \mathbf{N} = \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} \cap \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 = \{1, 3, 5\}, \quad \mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 = \{2, 4, 6\},$$
$$\mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_1 = \Phi.$$

c) Folosind definiția reuniunii a două mulțimi, avem

$$\mathbf{Z} \cup \mathbf{N} = \mathbf{Z}, \quad \mathbf{N} \cup \mathbf{A}_1 = \mathbf{N}, \quad \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 = \{-2, -1, 1, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$\mathbf{A}_2 \cup \mathbf{A}_3 = \{-3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}, \quad \mathbf{A}_3 \cup \mathbf{A}_1 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

d). Complementara lui $\mathbf{A}_2$ în raport cu N este mulțimea elementelor care aparțin lui N, însă nu aparțin lui $\mathbf{A}_2$. Avem

$$C_{\mathbf{N}} A_2 = \{7, 8, 9, \ldots, n\}.$$

2. Considerăm mulțimile

$A_1 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$

$C_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, $C_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_q\}$, $(p \neq q)$

Să se arate că

a) Mulțimile A_1, A_2 respectiv B_1, B_2 au aceeași putere.

b) Mulțimile C_1, C_2 nu au aceeași putere.

R. Se spune că două mulțimi au aceeași putere sau că sînt echivalente, dacă între elementele lor se poate stabili o corespondență biunivocă.

a). Mulțimile A_1, A_2 respectiv B_1, B_2 sînt finite și au același număr de elemente. O corespondență biunivocă între elementele mulțimilor A_1, A_2 respectiv B_1, B_2 este realizată de perechile

$$(2,1), \quad (4,3), \quad (6,5), \quad (8,7), \quad (10,9)$$

și, respectiv,

$$(1, a_1), \quad (2, a_2), \quad (3, a_3), \quad (4, a_4), \quad (5, a_5), \quad (6, a_6).$$

Perechea (2,1), de exemplu, înseamnă că elementului $2 \in A_1$ îi corespunde elementul $1 \in A_2$ și reciproc.

Deci mulțimile A_1, A_2 respectiv B_1, B_2 au aceeași putere (sau sînt echivalente).

b) Mulțimile C_1, C_2 nu au aceeași putere (nu sînt echivalente), deoarece, fiind finite și neavînd același număr de elemente, nu se poate stabili o corespondență biunivocă între ele.

3. Să se arate că mulțimea numerelor reale din intervalul (0,1) are aceeași putere cu mulțimea numerelor reale din intervalul $(1, \infty)$.

R. Efectuînd transformarea

$$y = \frac{1}{x}$$

se realizează o corespondență biunivocă a punctelor din intervalul (0,1) cu punctele intervalului $(1, \infty)$, deci cele două mulțimi au aceeași putere.

Scanned with OKEN Scanner

4. Să se arate că mulțimile infinite

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}, \qquad P = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$$

au aceeași putere.

Mulțimile **N**, P au aceeași putere, deși mulțimea P a numerelor naturale pare este o submulțime strictă a mulțimii **N** a numerelor naturale. Putem realiza o corespondență biunivocă între elementele lor cu ajutorul perechilor $(n, 2n)$, $(n = 1, 2, 3, ...)$.

5. Dacă A, B sînt două submulțimi ale unei mulțimi E, să se arate că

$$A \subseteq B \Leftrightarrow CB \subseteq CA.$$

Să demonstrăm mai întîi implicația

$$A \subseteq B \Rightarrow CB \subseteq CA$$

Notăm cu CA, CB respectiv complementara mulțimilor A, B față de mulțimea E. Fie un element oarecare $x \in CE$, deci $x \notin B$. Deoarece $A \subseteq B$, rezultă à fortiori că $x \notin A$, adică $x \in CA$. Avem deci

$$(\forall x) \quad x \in CB \Rightarrow x \in CA$$

prin urmare

$$CB \subseteq CA$$

Demonstrăm acum implicația inversă

$$CB \subseteq CA \Rightarrow A \subseteq B.$$

Considerăm un element oarecare $y \in A$, deci $y \notin CA$. Deoarece $CB \subseteq CA$, rezultă că $y \notin CB$, deci $y \in B$. Avem deci

$$(\forall y) \quad y \in A \Rightarrow y \in B$$

prin urmare

$$A \subseteq B.$$

Cu aceasta, proprietatea este complet demonstrată.

6. Să se arate că dacă A, B sînt două submulțimi ale mulțimii E, avem

$$A \cap B = \Phi \Leftrightarrow A \subseteq CB$$

$$A \cap B = \Phi \Leftrightarrow B \subseteq CA$$

R. Vom demonstra prima proprietate, cea de a doua demonstrîndu-se analog. Să arătăm mai întîi implicația

$$A \cap B = \Phi \Rightarrow A \subseteq CB$$

Fie orice element $x \in A$. Deoarece $A \cap B = \Phi$, înseamnă că $x \notin B$, deci $x \in CB$. Avem astfel

$$(\forall x) \quad x \in A \Rightarrow x \in CB$$

prin urmare

$$A \subseteq CB$$

Scanned with OKEN Scanner

Să demonstrăm acum implicația inversă

$$A \subseteq CB \Rightarrow A \cap B = \Phi$$

Fie orice element $x \in A$, deci $x \in CB$, adică $x \notin B$. Dacă $x \in A$ și $x \notin B$, rezultă că $A \cap B = \Phi$.

Cu aceasta, prima proprietate este complet demonstrată.

7. Fie E o mulțime și A, B două submulțimi ale sale. Să se arate că

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

R. Demonstrăm mai întîi implicația

$$A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B$$

Fie orice element $x \in A \cup B$. Înseamnă că $x \in A$ sau $x \in B$, conform definiției reuniunii a două mulțimi.

Considerăm pe rînd cele două posibilități :

a) Dacă $x \in A$, deoarece $A \cap B = A$, înseamnă că $x \in A \cap B$, de unde rezultă că avem și $x \in B$. Avem deci

$$(\forall x) \quad x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$$

prin urmare

$$A \cup B \subseteq B$$

b) Dacă $x \in B$, înseamnă că

$$(\forall x) \quad x \in A \cup B \rightarrow x \in B$$

prin urmare avem iarăși

$$A \cup B \subseteq B.$$

Să arătăm acum implicația inversă

$$A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A$$

Incluziunea $A \cap B \subseteq A$ este evidentă. Fie orice element $x \in A$, deci $x \in A \cup B$. Deoarece $A \cup B = B$, înseamnă că $x \in B$. Deoarece avem $x \in A$ și $x \in B$, rezultă că $x \in A \cap B$, deci $A \subseteq A \cap B$. Din $A \cap B \subseteq A$, $A \subseteq A \cap B$, deducem $A \cap B = A$.

Cu aceasta, proprietatea este complet demonstrată.

8. Dacă A, B, C sînt submulțimi ale unei mulțimi E, să se arate că

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

d) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

R. a) Fie orice element $x \in (A \cup B) \cup C$. Avem succesiv $x \in A \cup B$ sau $x \in C \Rightarrow (x \in A$ sau $x \in B)$ sau $x \in C \Rightarrow x \in A$ sau $(x \in B$ sau $x \in C) \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in A$ sau $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă incluziunea

$$(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C).$$

Fie acum orice element $x \in A \cup (B \cup C)$. Avem succesiv $x \in A$ sau $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A$ sau ($x \in B$ sau $x \in C$) $\Rightarrow$ ($x \in A$ sau $x \in B$) sau $x \in C \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in A \cup B$ sau $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$ de unde rezultă incluziunea

$$A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C.$$

Cele două incluziuni demonstrează prima egalitate.

b) Fie orice element $x \in (A \cap B) \cap C$. Avem $x \in A \cap B$ şi $x \in C \Rightarrow (x \in A$ şi $x \in B)$ şi $x \in C \Rightarrow x \in A$ şi ($x \in B$ şi $x \in C$) $\Rightarrow x \in A$ şi $x \in B \cap C \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$.

Rezultă astfel

$$A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$$

Aceste două incluziuni demonstrează a doua egalitate.

c) Fie orice element $x \in (A \cup B) \cap C$. Rezultă $x \in A \cup B$ şi $x \in C \Rightarrow$ $\Rightarrow (x \in A$ sau $x \in B)$ şi $x \in C \Rightarrow (x \in A$ şi $x \in C)$ sau ($x \in B$ şi $x \in C$) $\Rightarrow x \in A \cap C$ sau $x \in B \cap C \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Deci avem

$$(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Considerăm acum orice element $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Rezultă

$x \in A \cap C$ sau $x \in B \cap C \Rightarrow (x \in A$ şi $x \in C)$ sau ($x \in B$ şi $x \in C$) $\Rightarrow (x \in A$ sau $x \in B)$ şi $x \in C \Rightarrow x \in A \cup B$ şi $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C$.

Deci avem

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$$

Din cele două incluziuni deducem a treia egalitate.

d) Fie un element oarecare $x \in (A \cap B) \cup C$. Avem $x \in A \cap B$ sau $x \in C \Rightarrow (x \in A$ şi $x \in B)$ sau $x \in C \Rightarrow (x \in A$ sau $x \in C)$ şi ($x \in B$ sau $x \in C$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow x \in A \cup C$ şi $x \in B \cup C \Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Rezultă deci

$$(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Fie acum un element oarecare $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Avem

$x \in A \cup C$ şi $x \in B \cup C \Rightarrow (x \in A$ sau $x \in C)$ şi ($x \in B$ sau $x \in C) \Rightarrow (x \in A$ şi $x \in B)$ sau $x \in C \Rightarrow x \in A \cap B$ sau $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$.

Putem scrie

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$$

Relaţiile de incluziune scrise demonstrează a patra egalitate.

Scanned with OKEN Scanner

9. Să se demonstreze relaţiile lui De Morgan

$$a)\ C\left(\bigcup_{h=1}^{n} A_h\right) = \bigcap_{h=1}^{n} CA_h$$

$$b)\ C\left(\bigcap_{h=1}^{n} A_h\right) = \bigcup_{h=1}^{n} CA_h$$

unde A_h, $(h = 1, ..., n)$, sînt submulţimi ale unei mulţimi E.

R. $a)$ — Considerăm un element oarecare

$$x \in C\left(\bigcup_{h=1}^{n} A_h\right) \Rightarrow x \notin \bigcup_{h=1}^{n} A_h \Rightarrow x \notin A_1 \text{ şi } \ldots \text{ şi } x \notin A_n \Rightarrow x \in CA_1 \text{ şi } \ldots$$

$$x \in CA_n \Rightarrow x \in \bigcap_{h=1}^{n} CA_h = CA_1 \cap \ldots \cap CA_n.$$

Astfel avem

$$C\left(\bigcup_{h=1}^{n} A_h\right) \subseteq \bigcap_{h=1}^{n} CA_h$$

Fie acum un element oarecare

$$x \in \bigcap_{h=1}^{n} CA_h \Rightarrow x \in CA_1 \text{ şi } \ldots \text{ şi } x \in CA_n \Rightarrow x \notin A_1 \text{ şi } \ldots$$

$$x \notin A_n \Rightarrow x \notin \bigcup_{h=1}^{n} A_h = A_1 \cup \ldots \cup A_n \Rightarrow x \in C\left(\bigcup_{h=1}^{n} A_h\right).$$

Rezultă deci

$$\bigcap_{h=1}^{n} CA_h \subseteq C\left(\bigcup_{h=1}^{n} A_h\right)$$

Prima egalitate rezultă din cele două incluziuni.

$b)$ Notăm

$$A_h = CB_h, \qquad (h = 1, ..., n)$$

de unde rezultă

$$B_h = CA_h, \qquad (h = 1, ..., n)$$

dacă ţinem seama că pentru orice submulţime $M \subseteq E$, avem

$$C(CM) = M$$

Conform primei relaţii De Morgan, putem scrie

$$C\left(\bigcup_{h=1}^{n} B_h\right) = \bigcap_{h=1}^{n} CB_h$$

Luînd complementara în ambii membri, rezultă

$$\bigcup_{h=1}^{n} B_h = C\left(\bigcap_{h=1}^{n} CB_h\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd apoi seama că

$$A_h = CB_h, \qquad B_h = CA_h, \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

obţinem în definitiv a doua relaţie De Morgan

$$\bigcup_{h=1}^{n} CA_h = C\left(\bigcap_{h=1}^{n} A_h\right)$$

10. Se dau mulţimile

$$A = \{1,\ 2,\ 3\}, \qquad B = \{4,\ 5\}$$

Să se calculeze produsele carteziene $A \times B$, $B \times A$, precum şi diagonalele produselor carteziene $A^2 = A \times A$, $B^2 = B \times B$.

R. Produsul cartezian al mulţimilor X şi Y (în această ordine) este mulţimea perechilor ordonate (x, y), cu $x \in X$, $y \in X$, deci

$$X \times Y = \{(x, y)/x \in X,\ y \in Y\}$$

Diagonala produsului cartezian $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ este mulţimea perechilor (z, z), cu $z \in \mathbf{Z}$, deci notînd această diagonală cu $\Delta(\mathbf{Z}^2)$, avem

$$\Delta(\mathbf{Z}^2) = \{(z, z)/z \in \mathbf{Z}\}$$

În cazul nostru, avem

$$A \times B = \{(1, 4),\ (1, 5),\ (2, 4),\ (2, 5)\ (3, 4),\ (3, 5)\}$$

$$B \times A = \{(4, 1),\ (4, 2),\ (4, 3),\ (5, 1),\ (5, 2),\ (5, 3)\}$$

$$\Delta(A^2) = \{(1, 1),\ (2, 2),\ (3, 3)\}$$

$$\Delta(B^2) = \{(4, 4),\ (5, 5)\}$$

Observaţie. Deoarece pentru $a \neq b$, perechile (a, b) şi (b, a) sînt distincte, avem

$$A \times B \neq B \times A$$

STRUCTURI ALGEBRICE

11. Să se arate că mulţimea numerelor întregi formează grup abelian faţă de operaţia de adunare.

R. Trebuie să arătăm că mulţimea numerelor întregi verifică axiomele grupului faţă de operaţia de adunare.

Notăm cu $\mathbf{Z}$ mulţimea numerelor întregi

$$\mathbf{Z} = \{a, b, c, d, \ldots..\}$$

a_1) Dacă $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}$, atunci $a + b \in \mathbf{Z}$, deoarece suma a două numere întregi este tot un număr întreg.

Scanned with OKEN Scanner

a_2) Dacă $a\in\mathbf{Z}$, $b\in\mathbf{Z}$, $c\in\mathbf{Z}$, atunci avem

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

deoarece adunarea numerelor întregi este asociativă.

a_3) Elementul neutru față de operația „+" este numărul 0, deoarece

$$a+0=0+a=a, \quad (\forall a\in\mathbf{Z})$$

a_4) Orice element $a\in\mathbf{Z}$ are un opus $(-a)\in\mathbf{Z}$, astfel încît avem

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

a_5) Operația "+" este comutativă, adică

$$a+b=b+a$$

deoarece adunarea numerelor întregi este comutativă.

Observație. Mulțimea numerelor naturale

$$\mathbf{N}=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$$

formează numai semigrup abelian față de operația „+", deoarece nu este inversabilă, deci din $n\in\mathbf{N}$, nu rezultă și $-n\in\mathbf{N}$.

12. Mulțimea numerelor raționale fără numărul 0 formează grup abelian de operația de înmulțire „·".

R. Notăm

$$\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}-\{0\}=\left\{\frac{p}{q}\Big/ p,\ \ q\in\mathbf{Z},\ \ p\neq 0,\ \ q\neq 0\right\}.$$

Verificăm pe rînd axiomele grupului. Fie $x,\ y,\ z\in\mathbf{Q}^*$.

a_1) Dacă $x,\ y\in\mathbf{Q}^*$, atunci $x\cdot y\in\mathbf{Q}^*$.

Fie $x=\frac{p}{q}$, $y=\frac{r}{s}$. Rezultă $xy=\frac{pr}{qs}\in\mathbf{Q}^*$, deoarece $pr\in\mathbf{Z}$, $qs\in\mathbf{Z}$, $pr\neq 0$, $qs\neq 0$.

a_2) Înmulțirea este asociativă, adică

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$$

Fie $z=\frac{m}{n}$, $m\neq 0$, $n\neq 0$. Avem

$$x\cdot(y\cdot z)=\frac{p}{q}\cdot\left(\frac{r}{s}\cdot\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}\right)\cdot\frac{m}{n}=(x\cdot y)\cdot z$$

a_3) Elementul neutru față de operația de înmulțire este elementul 1 (unu), deoarece

$$x\cdot 1=1\cdot x=x; \quad (\forall x\in\mathbf{Q}^*)$$

Scanned with OKEN Scanner

a_4) Dacă $x \in \mathbf{Q}^*$, deci $x \neq 0$, atunci inversul lui este elementul $x^{-1} = \frac{1}{x}$ deoarece

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

a_5) Înmulțirea este comutativă, deoarece

$$x \cdot y = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q} = y \cdot x.$$

Observație. Mulțimea numerelor întregi $\mathbf{Z}$ formează numai *semigrup abelian față de înmulțire*. Într-adevăr, produsul a două numere întregi este totdeauna un număr întreg. Inversul unui număr întreg, cu excepția numerelor -1 și $+1$, nu este un număr întreg, deci operația de înmulțire nu se poate inversa în $\mathbf{Z}$.

13. Fie $\mathbf{R}$ mulțimea numerelor reale și

$$G = \{(a, b) / a, b \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0\}$$

Fie de asemenea operația „$\times$" definită în G astfel

$$(a, b) \times (c, d) = (ac, bc + d)$$

Să se arate că mulțimea G formează un grup necomutativ față de operația astfel definită.

R. Verificăm axiomele grupului.

a_1) Operația „$\times$" este peste tot definită în G.

a_2) Operația este asociativă, adică

$$(a, b) \times [(c, d) \times (e, f)] = [(a, b) \times (c, d)] \times (e, f)$$

deoarece putem scrie succesiv

$$(a, b) \times [(c, d) \times (e, f)] = (a, b) \times (ce, de \times f) = (ace, bce + de + f)$$

$$[(a, b) \times (c, d)] \times (e, f) = (ac, bc + d) \times (e, f) = (ace, bce + de + f)$$

a_3) Elementul neutru este perechea $(1, 0)$, deoarece dacă notăm cu (x, y) elementul neutru, trebuie să avem

$$(x, y) \times (a, b) = (a, b)$$

adică

$$(xa, ya + b) = (a, b)$$

Rezultă de aici

$$xy = a, \quad ya + b = b$$

Deoarece a este diferit de zero, se obține

$$x = 1, \quad y = 0.$$

Elementul neutru este într-adevăr $(1, 0)$, deoarece avem și

$$(a, b) \times (1, 0) = (a, b)$$

Scanned with OKEN Scanner

a_4) Procedînd în mod asemănător ca în cazul elementului neutru, se găsește că elementul invers al elementului (a, b) este elementul $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$. Avem într-adevăr

$$(a, b)\times\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)\times(a, b) = (1, 0)$$

a_5) Deoarece avem

$$(a, b)\times(c, d) = (ac, bc + d), \quad (c, d)\times(a, b) = (ac, ad + b)$$

rezultă că în general

$$(a, b)\times(c, d) \neq (c, d)\times(a, b)$$

Deci grupul G nu este comutativ.

Observație. Mulțimea

$$H = \{(1, a)/a\in\mathbf{R}\}$$

formează un subgrup față de aceeași operație „$\times$"

$$(1, a)\times(1, b) = (1, a + b)$$

Deoarece $H \subset G$, rezultă că H este un *subgrup al lui G*.

14. Considerăm mulțimea vectorilor

$$V = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ...\}$$

și aplicația $T_{\vec{a}}: V \longrightarrow V$, definită în modul următor

$$T_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a} \text{ (o translație de vector } \vec{a})$$

Să se arate că mulțimea translațiilor

$$\tau = \{T_{\vec{a}}/\vec{a}\in V\}$$

formează un *grup abelian* față de operația de compunere a translațiilor

$$T_{\vec{b}}\times T_{\vec{a}})\,(\vec{x}) = T_{\vec{b}}[T_{\vec{a}}(x)].$$

R. Verificăm axiomele grupului.

a_1) Operația „$\times$" este peste tot definită, adică dacă

$T_{\vec{a}}$, $T_{\vec{b}}\in\tau$, atunci $T_{\vec{b}}\times T_{\vec{a}}\in\tau$. Într-adevăr, avem

$$(T_{\vec{b}}\times T_{\vec{a}})\,(\vec{x}) = T_{\vec{b}}[T_{\vec{a}}(\vec{x})] = T_{\vec{b}}(\vec{x} + \vec{a}) = \vec{x} + \vec{a} + \vec{b} = T_{\vec{a}+\vec{b}}(\vec{x})$$

de unde rezultă

$$T_{\vec{b}}\times T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$$

Scanned with OKEN Scanner

a_2) Operația este asociativă, deoarece avem

$$T_{\vec{c}} \times (T_{\vec{b}} \times T_{\vec{a}}) = (T_{\vec{c}} \times T_{\vec{b}}) \times T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$$

adunarea vectorilor fiind asociativă, adică

$$\vec{c} + (\vec{b} + \vec{a}) = (\vec{c} + \vec{b}) + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

a_3) Elementul neutru al mulțimii τ este translația $T_{\vec{0}}$, întrucît

$$T_{\vec{0}} \times T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}} \times T_{\vec{0}} = T_{\vec{a}+\vec{0}} = T_{\vec{a}}$$

unde $\vec{0}$ este vectorul nul.

a_4) Elementul invers al elementului $T_{\vec{a}}$ este $T_{-\vec{a}}$ deoarece

$$T_{\vec{0}} \times T_{-\vec{a}} = T_{-\vec{a}} \times T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+(-\vec{a})} = T_{\vec{0}}$$

a_5) Grupul τ este comutativ, întrucît avem

$$T_{\vec{b}} \times T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}} \times T_{\vec{b}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$$

15. Mulțimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi formează un inel față de operațiile de adunare și înmulțire.

În general, pentru ca o mulțime nevidă de elemente să aibă o structură de inel, trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

1°) Să formeze grup abelian față de operația „+",

2°) Să aibă structură de semigrup față de operația „·",

3°) Operația „·" să fie distributivă față de operația „+".

R. Am arătat că mulțimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi formează un grup abelian față de adunare și semigrup (abelian) față de înmulțire.

Rămîne să verificăm distributivitatea înmulțirii față de adunare.

Dacă $a, b, c, \in \mathbf{Z}$, atunci se știe că avem

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

de unde rezultă că $\mathbf{Z}$ este un inel față de operațiile „+" și „·".

16. Mulțimea numerelor de forma

$$I = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in \mathbf{Z}\}$$

formează un inel față de adunare și înmulțire.

R. Verificăm mai întîi axiomele grupului abelian față de „+".

S_1) Dacă $a_1 + b_1\sqrt{2}$, $a_2 + b_2\sqrt{2} \in I$, avem

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 + a_2) + \sqrt{2}(b_1 + b_2) \in I,$$

deci adunarea este peste tot definitivă în I.

Scanned with OKEN Scanner

S_2) Fie de asemenea $a_3 + b_3\sqrt{2} \in I$. Atunci avem

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) + [(a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_3 + b_3\sqrt{2})] = (a_1 + a_2 + a_3) + \\ + (b_1 + b_2 + b_3)\sqrt{2}$$

$$[(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})] + (a_3 + b_3\sqrt{2}) = (a_1 + a_2 + a_3) + \\ + (b_1 + b_2 + b_3)\sqrt{2}$$

de unde rezultă asociativitatea adunării.

S_3) Elementul neutru față de adunare este numărul

$$0 + 0 \cdot \sqrt{2} = 0.$$

Într-adevăr, avem

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (0 + 0 \cdot \sqrt{2}) = (0 + 0 \cdot \sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2}) = a_1 + b_1\sqrt{2}.$$

S_4) Elementul opus al elementului $a_1 + b_1\sqrt{2}$ este elementul $(-a_1) + (-b_1)\sqrt{2}$, deoarece

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) + [(-a_1) + (-b_1)\sqrt{2}] = (-a_1) + (-b_1)\sqrt{2} + \\ + (a_1 + b_1\sqrt{2}) = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} = 0$$

S_5) $(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2}) = \\ = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2},$

deci adunarea este comutativă.

Verificăm acum axiomele semigrupului față de operația „$\cdot$".

T_1) $(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} \in I$

deci înmulțirea este peste tot definită în I.

T_2) $(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot [(a_2 + b_2\sqrt{2}) \cdot (a_3 + b_3\sqrt{2})] = [(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + \\ + b_2\sqrt{2})] \cdot (a_3 + b_3\sqrt{2}),$

demonstrația acestei egalități reducîndu-se la asociativitatea înmulțirii în **Z**.

T_3) Elementul neutru față de înmulțire este numărul

$$1 + 0 \cdot \sqrt{2} = 1$$

deoarece avem

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (1 + 0 \cdot \sqrt{2}) = (1 + 0 \cdot \sqrt{2})\,(a_1 + b_1\sqrt{2}) = a_1 + b_1\sqrt{2}.$$

În fine operația de înmulțire este distributivă față de adunare, deoarece avem

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot [(a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_3 + b_3\sqrt{2})] = (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + \\ + b_2\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2})\,(a_3 + b_3\sqrt{2}),$$

această egalitate demostrîndu-se folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare în **Z**.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Operația de înmulțire este de asemenea comutativă, deoarece avem

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_2 + b_2\sqrt{2})\,(a_1 + b_1\sqrt{2}) = a_1a_2 + \\ + 2b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}.$$

Deci inelul I este comutativ.

17. Să se arate că mulțimea numerelor nenule de forma

$$K = \{a + b\sqrt{2}/a, b \in \mathbb{Q}, \quad a^2 + b^2 \neq 0\}$$

formează un corp comutativ (cîmp) față de adunare și înmulțire.

R. O mulțime nevidă K se numește corp comutativ, dacă ea are o structură de inel comutativ față de operațiile de adunare și de înmulțire în care orice element $a \in K$, $a \neq 0$, are un invers $a^{-1} \in K$ față de operația de înmulțire.

Am văzut că mulțimea

$$I = \{a + b\sqrt{2}/a, b \in \mathbb{Q}\} \supset K$$

formează un inel comutativ față de operațiile de adunare și înmulțire.

Fie acum orice element nenul $a + b\sqrt{2} \in K$, deci $a^2 + b^2 \neq 0$. Inversul său este elementul

$$(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$$

care există, deoarece expresia $a^2 - 2b^2$ nu se anulează, întrucît numerele a, b sînt raționale și nu toate nule în același timp.

Rezultă că mulțimea K înzestrată cu operațiile „$+$" și „$\cdot$" are o structură de corp comutativ (cîmp.)

18. Să se calculeze expresia

$$E = \left(\frac{17 - 5i}{11 + 6i}\right)^3 + \left(\frac{5 + 13i}{9 + 4i}\right)^3, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

R. Înmulțim numărătorul și numitorul fracțiilor cu conjugatul numitorului respectiv.

$$E = \frac{[(17 - 5i)\,(11 - 6i)]^3}{(121 + 36)^3} + \frac{[(5 + 13i)\,(9 - 4i)]^3}{(81 + 16)^3} = \frac{(157 - 157\,i)^3}{157^3} + \frac{(97 + 97\,i)^3}{97^3}.$$

Simplificînd și ridicînd la puterea a treia, rezultă

$$E = (1 - i)^3 + (1 + i)^3 = 1 - 3i - 3 + i + 1 + \\ + 3i - 3 - i = -4$$

Scanned with OKEN Scanner

19. Să se calculeze

$$z = \sqrt[4]{-1 + i\sqrt{3}}.$$

R. Numărul complex $-1 + i\sqrt{3}$ are modulul 2 și argumentul $\frac{2\pi}{3}$, deoarece

$$r = \sqrt{1+3} = 2, \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Avem atunci succesiv

$$z = \sqrt[4]{-1 + i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\right]} =$$

$$= \sqrt[4]{2} \cdot \left(\cos\frac{2k\pi + \frac{2\pi}{3}}{4} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{2\pi}{3}}{4}\right), \quad (K = 0, 1, 2, 3)$$

Se obțin valorile

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = -\sqrt[4]{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad z_3 = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

20. Să se arate că dacă z este un număr complex de modul 1, atunci

$$Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0$$

unde Re (z) înseamnă partea reală a numărului complex z.

R. Dacă notăm

$$z = a + ib$$

atunci, conform ipotezei, putem scrie

$$z = a^2 + b^2 = 1.$$

Avem apoi succesiv

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{a+bi-1}{a+bi+1} = \frac{a^2+b^2-1+2bi}{(a+1)^2+b^2} = \frac{a^2+b^2-1+2bi}{a^2+b^2+2a+1}.$$

Ținînd seama că

$$a^2 + b^2 = 1$$

putem scrie în definitiv

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{b}{a+1}i$$

de unde rezultă

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

21. Să se rezolve ecuația algebrică cu coeficienți complecși

$$z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i = 0$$

R. Se observă că $z_1 = i$ este o rădăcină a ecuației date. Prin împărțire cu $z - i$, avem

$$z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i \equiv (z - i)(z^2 - 5iz - 6)$$

Rămîne să rezolvăm ecuația de gradul doi

$$z^2 - 5iz - 6 = 0$$

Această ecuație are rădăcinile

$$z_{2,3} = \frac{5i \pm \sqrt{-25 + 24}}{2} = \frac{5i \pm i}{2}.$$

Rădăcinele ecuației date sînt deci

$$z_1 = i, \quad z_2 = 2i, \quad z_3 = 3i$$

22. Utilizînd înmulțirea numerelor complexe

$$3 + i, \quad 11 + 13i, \quad 5 + 2i$$

să se demonstreze egalitatea

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{13}{11} + \operatorname{arctg}\frac{2}{5} = \frac{\pi}{2}$$

R. Avem

$$(3 + i)(11 + 13i)(5 + 2i) = 290i$$

Se știe că argumentul produsului a n numere complexe este egal cu suma argumentelor celor n numere complexe, deci

$$\arg(3 + i) + \arg(11 + 13i) + \arg(5 + 2i) = \arg(290i).$$

Deoarece avem

$$\arg(3 + i) = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}, \quad \arg(11 + 13i) = \operatorname{arctg}\frac{13}{11},$$

$$\arg(5 + 2i) = \operatorname{arctg}\frac{2}{5}, \quad \arg(290i) = \frac{\pi}{2}$$

rezultă că putem scrie egalitatea din enunț

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{13}{11} + \operatorname{arctg}\frac{2}{5} = \frac{\pi}{2}.$$

23. Știind că

$$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

să se calculeze expresia

$$E = (az^2 + bz)(bz^2 + az)$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Avem

$$E = abz^4 + (a^2 + b^2)\, z^3 + abz^2 = abz^2(z^2 + 1) + (a^2 + b^2)\, z^3$$

Deoarece z este o rădăcină cubică complexă a unității, adică

$$z^3 - 1 = 0, \quad (z \neq 1)$$

rezultă că

$$z^2 + z + 1 = 0$$

Expresia devine succesiv

$$E = ab(-z - 1)\,(-z) + a^2 + b^2 = ab(z^2 + z) + a^2 + b^2 = a^2 - ab + b^2$$

24. Să se rezolve ecuația

$$ax^6 + b = 0$$

unde a și b au semne contrarii.

R. Avem

$$x^6 = -\frac{b}{a}, \quad x = \sqrt[6]{-\frac{b}{a}}.$$

Scriem pe $-\frac{b}{a}$ sub formă trigonometrică. Modulul este $r = -\frac{b}{a}$, iar argumentul este $\theta = 0°$. Rezultă

$$x_k = \sqrt[6]{-\frac{b}{a}} \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{6}\right), \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

Rădăcinile ecuației sînt

$$x_0 = \sqrt[6]{-\frac{b}{a}} \cdot (\cos 0° + \mathrm{i}\sin 0°) = \sqrt[6]{-\frac{b}{a}},$$

$$x_1 = \sqrt[6]{-\frac{b}{a}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{-\frac{b}{a}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2},$$

$$x_2 = \sqrt[6]{-\frac{b}{a}} \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{-\frac{b}{a}} \cdot \frac{-\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2},$$

$$x_3 = \sqrt[6]{-\frac{b}{a}} \cdot (\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -\sqrt[6]{-\frac{b}{a}},$$

$$x_4 = \sqrt[5]{-\frac{b}{a}} \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\sqrt[6]{-\frac{b}{a}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2}$$

$$x_5 = \sqrt[6]{-\frac{b}{a}} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right) = -\sqrt[6]{-\frac{b}{a}} \cdot \frac{-\sqrt{3} + \mathrm{i}}{2}.$$

25. Să se determine λ real, astfel ca

$$a + b\mathrm{i} = \frac{1 + \lambda\mathrm{i}}{1 - \lambda\mathrm{i}}, \quad (a^2 + b^2 = 1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Egalitatea se mai poate scrie sub forma

$$(a + ib)(1 - i\lambda) = 1 + i\lambda,$$

sau, după efectuarea calculelor

$$a + b\lambda + i(b - a\lambda) = 1 + i\lambda,$$

de unde rezultă

$$a + b = 1, \quad b - a\lambda = \lambda$$

Din aceste două ecuații obținem

$$\lambda = \frac{1 - a}{b} = \frac{b}{1 + a}.$$

Ținînd seama că $a^2 + b^2 = 1$, putem lua

$$a = \cos\theta, \quad b = \sin\theta, \quad \theta = \arg(a + ib) = \operatorname{Arctg}\frac{b}{a}$$

și atunci obținem

$$\lambda = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

26. Să se determine unghiul θ astfel ca expresia

$$E = \left[\frac{1 - i\sqrt{3}}{2(\cos\theta + i\sin\theta)}\right]^5$$

să fie reală și pozitivă.

R. Numărul complex $1 - i\sqrt{3}$ are modulul egal cu 2 și argumentul egal cu $\frac{5\pi}{3}$, deci

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

Avem succesiv

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{2(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{2(\cos\theta + i\sin\theta)} = \cos\left(\frac{5\pi}{3} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} - \theta\right).$$

Aplicînd formula lui Moivre, putem scrie

$$E = \cos 5\left(\frac{5\pi}{3} - \theta\right) + i\sin 5\left(\frac{5\pi}{3} - \theta\right).$$

Pentru ca această expresie să fie reală și pozitivă, trebuie ca

$$\sin 5\left(\frac{5\pi}{3} - \theta\right) = 0, \qquad \cos 5\left(\frac{5\pi}{3} - \theta\right) = 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$5\left(\frac{5}{3}-\theta\right)=2k\pi, \qquad (k\in\mathbf{Z}).$$

Rezolvînd această ecuație, obținem

$$\theta=\frac{5\pi}{3}-\frac{2k\pi}{3}.$$

27. Să se exprime

a) $\cos 6\theta$ cu ajutorul lui $\cos\theta$,

b) $\sin 7\theta$ cu ajutorul lui $\sin\theta$.

R. Aplicînd formula lui Moivre și binomul lui Newton, putem scrie

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+$$
$$+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\ldots)+i(C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+$$
$$+C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\ldots),$$

de unde obținem, prin identificare, relațiile

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\ldots.$$
$$\sin n\theta=C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\ldots$$

a) Înlocuim $n=6$ în prima relație

$$\cos 6\theta=\cos^6\theta-C_6^2\cos^4\theta\sin^2\theta+C_6^4\cos^2\theta\sin^4\theta-\sin^6\theta=\cos^6\theta-$$
$$-15\cos^4\theta(1-\cos^2\theta)+15\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)^2-(1-\cos^2\theta)^3$$

Efectuînd calculele, obținem

$$\cos 6\theta=32\cos^6\theta-48\cos^4\theta+18\cos^2\theta-1.$$

b) Înlocuim $n=7$ în a doua relație

$$\sin 7\theta=C_7^1\cos^6\theta\sin\theta-C_7^3\cos^4\theta\sin^3\theta+C_7^5\cos^2\theta\sin^5\theta-\sin^7\theta=$$
$$=7(1-\sin^2\theta)^3\sin\theta-35(1-\sin^2\theta)^2\sin^3\theta+21(1-\sin^2\theta)\sin^5\theta-\sin^7\theta$$

Efectuînd calculele, obținem

$$\sin 7\theta=7\sin\theta-56\sin^3\theta+112\sin^5\theta-64\sin^7\theta.$$

ALGEBRA VECTORIALĂ

28. Să se arate că trei vectori care satisfac relația $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3=\vec{0}$, închid un triunghi.

R. Din figura 1, se vede că adunînd cei trei vectori după regula triunghiului, suma lor este vectorul nul, în cazul cînd cei trei vectori închid triunghiul (fig. 1).

Scanned with OKEN Scanner

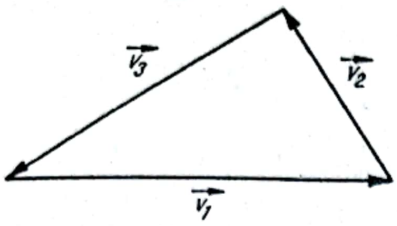

Fig. 1

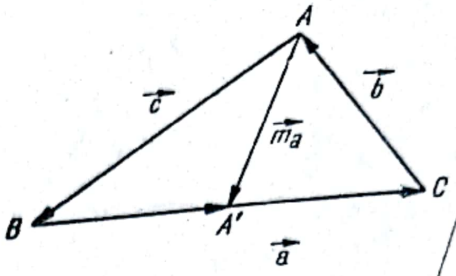

Fig. 2

29. Să se arate că vectorii mediană ai unui triunghi închid un nou triunghi.

R. Din figura 2 se vede că avem, notînd $\overrightarrow{AA'} = \vec{m}_a$,

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \Rightarrow \vec{m}_a = \vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}, \qquad \left(\text{deoarece } \overrightarrow{BM} = \frac{\vec{a}}{2}\right)$$

Prin permutări circulare, obținem

$$\vec{m}_b = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}, \quad \vec{m}_c = \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}.$$

Avem apoi succesiv

$$\vec{m}_a + \vec{m}_b + \vec{m}_c = \vec{c} + \frac{\vec{a}}{2} + \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} + \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2} = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}$$

deoarece vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ închid triunghiul ABC.

30. Să se exprime, cu ajutorul laturilor unui triunghi, vectorii bisectoare ai triunghiului.

R. Fie AA' bisectoarea din A (fig. 3) și să notăm

$$\overrightarrow{BA'} = \vec{p}, \quad \overrightarrow{A'C} = \vec{q}, \quad AA' = \vec{\beta}_a, \quad (\vec{p} + \vec{q} = \vec{a}).$$

Conform teoremei bisectoarei, avem

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{p}{p+q} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow \frac{p}{a} = \frac{c}{b+c}$$

de unde rezultă că $\vec{p}$ are expresia

$$\vec{p} = p \cdot \vec{a}_0 = \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{\vec{a}}{a} = \frac{b}{b+c}\vec{a}.$$

Deoarece avem $\vec{\beta} = \vec{c} + \vec{p}$, rezultă în definitiv formulele

$$\vec{\beta}_a = \vec{c} + \frac{c}{b+c} \cdot \vec{a}, \quad \vec{\beta}_b = \vec{a} + \frac{a}{c+a}\vec{b},$$
$$\vec{\beta}_c = \vec{b} + \frac{b}{a+b} \cdot \vec{c}$$

expresiile vectorilor $\vec{\beta}_b$, $\vec{\beta}_c$ fiind obținute din expresia vectorului $\vec{\beta}_a$ prin permutări circulare ale literelor a, b, c.

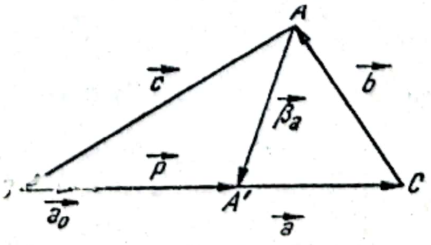

Fig. 3

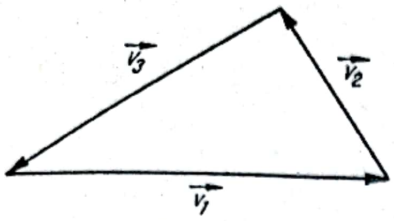

Fig. 1

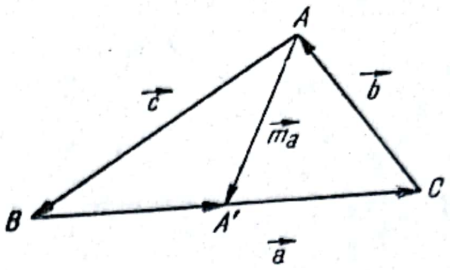

Fig. 2

29. Să se arate că vectorii mediană ai unui triunghi închid un nou triunghi.

R. Din figura 2 se vede că avem, notînd $\overrightarrow{AA'} = \vec{m}_a$,

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \Rightarrow \vec{m}_a = \vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}, \qquad \left(\text{deoarece } \overrightarrow{BM} = \frac{\vec{a}}{2}\right)$$

Prin permutări circulare, obținem

$$\vec{m}_b = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}, \quad \vec{m}_c = \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}.$$

Avem apoi succesiv

$$\vec{m}_a + \vec{m}_b + \vec{m}_c = \vec{c} + \frac{\vec{a}}{2} + \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} + \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2} = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}$$

deoarece vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ închid triunghiul ABC.

30. Să se exprime, cu ajutorul laturilor unui triunghi, vectorii bisectoare ai triunghiului.

R. Fie AA' bisectoarea din A (fig. 3) și să notăm

$$\overrightarrow{BA'} = \vec{p}, \quad \overrightarrow{A'C} = \vec{q}, \quad AA' = \vec{\beta}_a, \quad (\vec{p} + \vec{q} = \vec{a}).$$

Conform teoremei bisectoarei, avem

$$\frac{p}{q} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{p}{p+q} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow \frac{p}{a} = \frac{c}{b+c}$$

de unde rezultă că $\vec{p}$ are expresia

$$\vec{p} = p \cdot \vec{a}_0 = \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{\vec{a}}{a} = \frac{b}{b+c}\vec{a}.$$

Deoarece avem $\vec{\beta} = \vec{c} + \vec{p}$, rezultă în definitiv formulele

$$\vec{\beta}_a = \vec{c} + \frac{c}{b+c} \cdot \vec{a}, \quad \vec{\beta}_b = \vec{a} + \frac{a}{c+a}\vec{b},$$
$$\vec{\beta}_c = \vec{b} + \frac{b}{a+b} \cdot \vec{c}$$

expresiile vectorilor $\vec{\beta}_b$, $\vec{\beta}_c$ fiind obținute din expresia vectorului $\vec{\beta}_a$ prin permutări circulare ale literelor a, b, c.

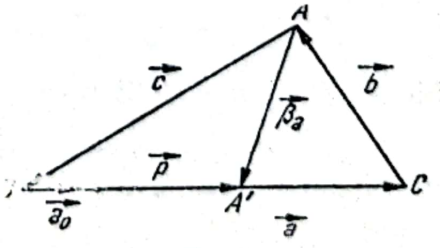

Fig. 3

Scanned with OKEN Scanner

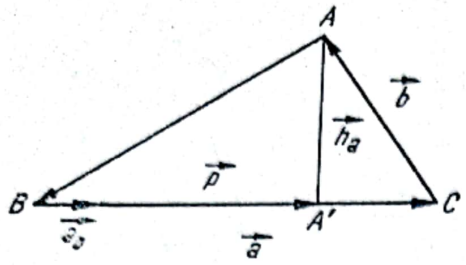

Fig. 4

31. Să se exprime cu ajutorul laturilor unui triunghi vectorii înălțime ai triunghiului.

R. Fie AA' înălțimea din A (fig. 4) și să notăm

$$\overrightarrow{BA'} = \vec{p}, \quad \overrightarrow{AA'} = \vec{h}_a, \quad \vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{a}.$$

Avem succesiv

$$p = c\cos B = c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a},$$

$$\vec{p} = p \cdot \vec{a}_0 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{\vec{a}}{a} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a^2} \cdot \vec{a}.$$

Deoarece $\vec{h} = \vec{c} + \vec{p}$, rezultă în definitiv formulele

$$\vec{h}_a = \vec{c} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a^2} \cdot \vec{a}, \quad \vec{h}_b = \vec{a} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b^2} \cdot \vec{b},$$

$$\vec{h}_c = \vec{b} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c^2} \cdot \vec{c},$$

expresiile vectorilor $\vec{h}_b$, $\vec{h}_c$ fiind obținute din expresia vectorului $\vec{h}_a$ prin permutări circulare ale literelor a, b, c.

32. Să se afle unghiul format de vectorii

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

R. Notînd cu φ unghiul celor doi vectori, avem succesiv

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{11}{14}$$

de unde rezultă

$$\varphi = \operatorname{Arc}\cos\frac{11}{14}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{11}{14} > 0, \quad \text{deci} \quad \frac{\pi}{2} > \varphi > \frac{\pi}{4}.$$

33. Se dau vectorii

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

Să se afle proiecția fiecăruia dintre ei pe celălalt.

Notînd cu a_b, b_a proiecția lui a pe direcția lui b, respectiv proiecția lui b pe direcția lui a, avem

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = a \cdot b_a = b \cdot a_b$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că avem succesiv

$$a_b = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{b} = \frac{|4\cdot 1 + 0\cdot 2 + (-2)\cdot 1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$b_a = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{a} = \frac{2}{\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

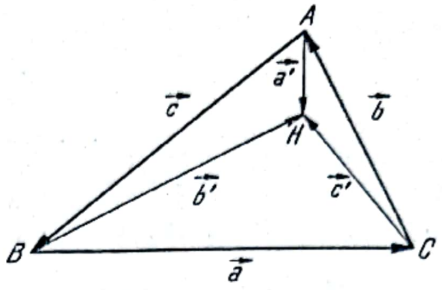

Fig. 5

34. Să se arate că, într-un triunghi, cele trei înălțimi sînt concurente.

R. Notăm cu H (fig. 5) punctul de intersecție al înălțimilor duse din B și C.

Considerînd vectorii

$$\overrightarrow{BH} = \vec{b}', \quad \overrightarrow{CH} = \vec{c}', \quad \overrightarrow{AH} = \vec{a}'$$

și ținînd seama că $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$, putem scrie

$$\vec{b}\cdot\vec{b}' = 0, \quad \vec{c}\cdot\vec{c}' = 0.$$

Urmărim să arătăm că înălțimea dusă din A trece și ea prin punctul H. Din triunghiurile de vectori ABH, CAH, BCH, avem relațiile

$$\vec{c} = \vec{a}' - \vec{b}', \quad \vec{a} = \vec{b}' - \vec{c}', \quad \vec{b} = \vec{c}' - \vec{a}'$$

de unde deducem că avem formulele

$$(\vec{c}' - \vec{a}')\cdot\vec{b}' = 0, \quad (\vec{a}' - \vec{b}')\cdot\vec{c}' = 0.$$

Adunînd membru cu membru aceste formule, obținem relația

$$\vec{a}'\vec{c}' - \vec{a}'\vec{b}' = 0 \Rightarrow \vec{a}'(\vec{c}' - \vec{b}') = 0 \Rightarrow \vec{a}'\cdot\vec{a} = 0$$

care ne arată că $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, deci înălțimea din A trece și ea prin H, ceea ce era de demonstrat.

35. Să se demostreze că, într-un triunghi, mediatoarele sînt concurente.

R. Fie A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB (fig. 6).

Notăm

$$\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{CA} = \vec{b},$$

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}).$$

$$\overrightarrow{A'O} = \vec{a}', \quad \overrightarrow{B'O} = \vec{b}', \quad \overrightarrow{C'O} = \vec{c}',$$

unde O este punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor AC și AB.

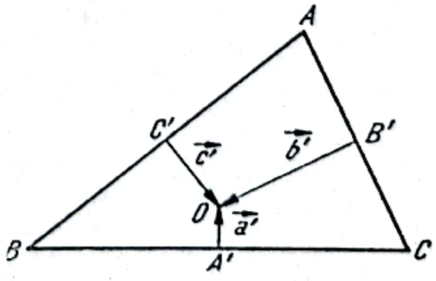

Fig. 6

Scanned with OKEN Scanner

Avem deci, prin ipoteză,

$$\vec{b}\cdot\vec{b}' = 0, \quad \vec{c}\cdot\vec{c}' = 0$$

deoarece $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{B'O}$, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{C'O}$. Dacă reuşim să arătăm că $\overrightarrow{A'O} \perp \overrightarrow{BC}$, atunci va rezulta că $A'O$ este mediatoarea laturii BC, deci cele trei mediatoare sînt concurente. Avem relaţia

$$\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{C'O} + \overrightarrow{BO'} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}}{2} + \vec{c}' - \vec{b}' = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} + \vec{c} =$$

$$= -2(\vec{c}' - \vec{b}').$$

Ţinînd seama de faptul că $\vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$, rezultă relaţiile

$$\vec{a} = 2(\vec{c}' - \vec{b}'), \quad \vec{b} = 2(\vec{a}' - \vec{c}'), \quad \vec{c} = 2(\vec{b}' - \vec{a}')$$

ultimele două fiind deduse din prima prin permutări circulare.

Avem apoi implicaţiile

$$\vec{b}\cdot\vec{b}' = 0 \Rightarrow 2(\vec{a}' - \vec{c}')\cdot\vec{b}' = 0 \Rightarrow \vec{a}'\cdot\vec{b}' - \vec{c}'\cdot b' = 0.$$

$$\vec{c}\cdot\vec{c}' = 0 \Rightarrow 2(\vec{b}' - \vec{a}')\cdot\vec{c}' = 0 \Rightarrow \vec{b}'\cdot\vec{c}' - \vec{a}'\cdot\vec{c}' = 0.$$

Aducînd membru cu membru ultimele două egalităţi, obţinem

$$\vec{a}'\cdot\vec{b}' - \vec{a}'\cdot\vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a}'(\vec{b}' - \vec{c}') = 0 \Rightarrow \vec{a}'\cdot\left(-\frac{\vec{a}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \vec{a}'\cdot\vec{a} = 0$$

de unde rezultă că $\overrightarrow{A'O} \perp \overrightarrow{BC}$, ceea ce trebuia demonstrat.

36. Să se demostreze că, într-un triunghi, medianele sînt concurente.

R. Fie A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB (fig. 7) şi fie G punctul de intersecţie al medianelor BB', CC'. Notăm

$$\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{CA} = \vec{b}, \quad (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}).$$

Din geometria sintetică ştim că avem

$$BG = \frac{2}{3}BB', \quad CG = \frac{2}{3}CC'$$

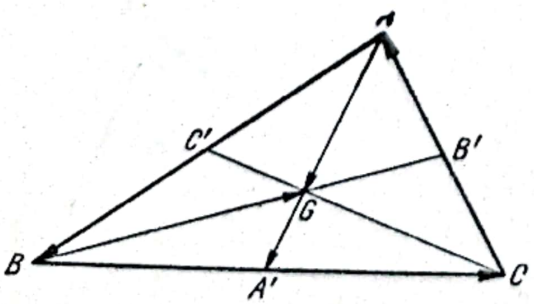

Fig. 7

de unde rezultă că putem scrie succesiv

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} - \frac{2}{3}\vec{m}_b = \frac{2}{3}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'} = \frac{2}{3}\vec{m}_c = \frac{2}{3}\left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

ţinînd seama de expresia vectorilor mediană în funcţie de laturi.

Scanned with OKEN Scanner

Urmărim să arătăm că vectorii $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{GA'}$ sînt coliniari, de unde va rezulta că mediana AA' trece şi ea prin punctul G.

Putem scrie succesiv

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \vec{c} + \frac{2}{3}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) =$$

$$= -\vec{a} - \vec{b} + \frac{2}{3}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = -\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$$

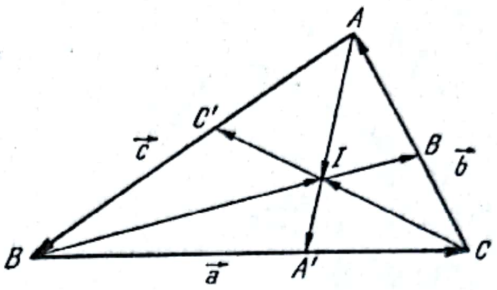

Fig. 8

$$\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA'} = -\frac{2}{3}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) + \frac{\vec{a}}{2} = -\frac{1}{6}(\vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$$

de unde rezultă că vectorii $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{GA'}$ sînt coliniari.

37. Să se arate că, într-un triunghi, bisectoarele sînt concurente.

R. Fie A', B', C' picioarele bisectoarelor unghiurilor A, B, C respectiv, şi I punctul de intersecţie al bisectoarelor BB', CC' (fig. 8). Notăm

$$\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{CA} = \vec{b}, \quad (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}).$$

Urmărim să arătăm că vectorii $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AA'}$ sînt coliniari, de unde va rezulta că bisectoarea AA' trece şi ea prin punctul I.

Aplicînd teorema bisectoarei în triunghiul ABC (bisectoarea BB'), avem

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{CB'}{b - CB'} = \frac{a}{c} \Rightarrow CB' = \frac{ab}{a + c}$$

Ţinînd seama de faptul că CI este bisectoare în triunghiul BCB', avem

$$\frac{BI}{IB'} = \frac{BC}{CB'} \Rightarrow \frac{BI}{IB' + BI} = \frac{BC}{BC + CB'} \Rightarrow \frac{BI}{BB'} = \frac{a}{a + \frac{ab}{a + c}} = \frac{a + c}{a + b + c}.$$

Deoarece vectorii $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BB'}$ au aceeaşi direcţie şi sens, putem scrie

$$\overrightarrow{BI} = \frac{a + c}{a + b + c}\overrightarrow{BB'} = \frac{a + c}{a + b + c}\left(\vec{a} + \frac{a}{a + c}\vec{b}\right)$$

ţinînd seama de expresiile vectorilor bisectoare în funcţie de laturi.

Avem apoi succesiv

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \vec{c} + \frac{a + c}{a + b + c}\left(\vec{a} + \frac{a}{a + c}\vec{b}\right) = \vec{c} + \frac{a + c}{a + b + c}\left[\vec{a} -\right.$$

$$\left. - \frac{a}{a + c}(\vec{a} + \vec{c})\right] = \frac{b + c}{a + b + c}\left(\vec{c} + \frac{c}{b + c}\vec{a}\right) = \frac{b + c}{a + b + c} \cdot \overrightarrow{AA'}$$

de unde rezultă că vectorii $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AA'}$ sînt coliniari.

Scanned with OKEN Scanner

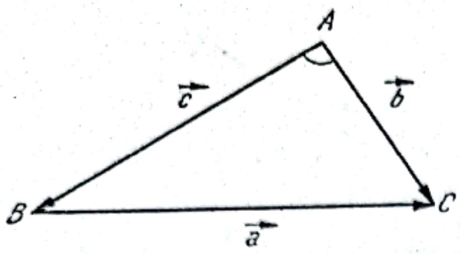

Fig. 9

38. Să se demostreze teorema cosinusului, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

R. Considerăm triunghiul oarecare ABC (fig. 9). Notînd

$$\overrightarrow{BA} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{a}$$

avem relația vectorială evidentă

$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}.$$

Ridicînd scalar la pătrat avem

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

și, dacă ținem seama că

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = bc\cos A$$

rezultă relația trigonometrică

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

numită teorema cosinusului.

39. Să se demostreze teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

R. Considerăm triunghiul oarecare ABC orientat ca în figura 9. Avem

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin C = a(b\sin C) = ah_a = 2S$$

unde am notat cu S aria triunghiului ABC.

Rezultă deci că putem scrie

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{b}\times\vec{c}| = |\vec{c}\times\vec{a}| = 2S \Leftrightarrow ab\sin C = bc\sin A = ca\sin B = 2S.$$

Împărțind cu abc, obținem relațiile trigonometrice

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}$$

deoarece se știe, din geometria sintetică, că avem $R = \frac{abc}{4S}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Răsturnînd rapoartele, obținem relațiile

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

care constituie teorema sinusurilor.

Scanned with OKEN Scanner

40. Să se demonstreze vectorial că într-un romb diagonalele sînt perpendiculare.

R. Considerăm rombul $ABCD$, unde am notat (fig. 10)

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA} = \vec{b}, \quad (|\vec{a}| = |\vec{b}|).$$

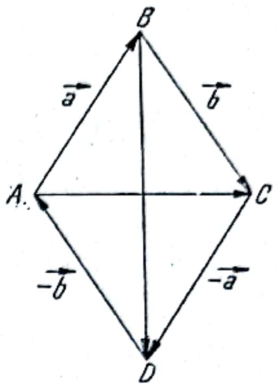

Fig. 10

Avem succesiv

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \vec{b} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{b} + \vec{a})(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} +$$

$$+ \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0$$

de unde rezultă că $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$, ceea ce trebuia demostrat.

41. Se dau vectorii

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}.$$

Se cere:

1) Să se afle înălțimea paralelogramului construit pe vectorii $\vec{b}$, $\vec{c}$ și este perpendiculară pe vectorul $\vec{c}$.

2) Să se afle înălțimea paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ și este perpendiculară pe planul generat de vectorii $\vec{b}$, $\vec{c}$.

1) Notînd cu h_1 înălțimea paralelogramului, avem

$$|\vec{b} \times \vec{c}| = b \cdot c \sin(\vec{b}, \vec{c}) = ch_1 \Rightarrow h_1 = \frac{|\vec{b} \times \vec{c}|}{c}.$$

Avem însă formulele de calcul

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k} \Rightarrow |\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{25 + 1 + 49} = 5\sqrt{3}$$

$$c = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

de unde rezultă

$$h_1 = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{42}}{14}.$$

2) Notăm cu h_2 înălțimea paralelipipedului și obținem

$$h_2 = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem apoi succesiv

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=6+6+6-27-8-1=-18$$

de unde rezultă în definitiv

$$h_2=\frac{|-18|}{5\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{5}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

MATRICI. DETERMINANȚI. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE. DREAPTA. PLANUL

Matrici

42. Se dau matricile

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 6 & 5 & -4 & 3 \\ 5 & -4 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

Să se calculeze matricea $2A - 3B$.

R. Avem succesiv

$$2A - 3B = 2\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{Vmatrix} - 3\begin{Vmatrix} 6 & 5 & -4 & 3 \\ 5 & -4 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 6 & -8 \\ 4 & 6 & -8 & 10 \\ 6 & -8 & 10 & 12 \end{Vmatrix} -$$

$$- \begin{Vmatrix} 18 & 15 & -12 & 9 \\ 15 & -12 & 9 & 6 \\ -12 & 9 & 6 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -16 & -11 & 18 & -17 \\ -11 & 18 & -17 & 4 \\ 18 & -17 & 4 & 9 \end{Vmatrix}$$

43. Se dau matricile

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$$

Să se calculeze produsul AB al acestor matrici. Produsul BA are sens?

R. Juxtapunem cele două matrici și avem

$$AB = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -4 & 6 \\ 18 & -20 \\ -12 & 10 \end{Vmatrix} = 2 \begin{Vmatrix} -2 & 30 \\ 9 & -10 \\ -6 & 5 \end{Vmatrix}$$

Produsul BA nu are sens deoarece numărul de coloane din B nu coincide cu numărul de linii din A.

44. Să se calculeze produsele AB și BA, unde A, B sînt matricile

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix}$$

R. Atît produsul AB cît și BA are sens. Obținem pe rînd

$$B = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 13 \\ -4 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$BA = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5 & 2 & 7 \\ 3 & 10 & 7 \\ 10 & 4 & -6 \end{Vmatrix}$$

45. Se dau matricile A și B peste corpul numerelor reale sau complexe

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ -a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ -a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ -b_2 & b_1 & -b_4 & b_3 \\ -b_3 & b_4 & b_1 & -b_2 \\ -b_4 & -b_3 & b_2 & b_1 \end{Vmatrix}$$

Să se arate că aceste matrici sînt permutabile între ele, adică avem $AB = BA$.

Dacă facem notațiile

$$c_{11} = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4, \quad c_{12} = a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3,$$
$$c_{13} = a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2, \quad c_{14} = a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1,$$
$$c_{21} = a_1b_3 - a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3, \quad c_{22} = a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4,$$
$$c_{23} = a_1b_4 - a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1, \quad c_{24} = a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_1 - a_4b_2,$$

Scanned with OKEN Scanner

$$c_{31} = -a_1b_3 - a_2b_4 - a_3b_1 + a_4b_2, \quad c_{32} = a_1b_4 - a_2b_3 - a_3b_2 - a_4b_1,$$
$$c_{33} = a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 + a_4b_4, \quad c_{34} = -a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 - a_4b_3,$$
$$c_{41} = -a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 - a_4b_1, \quad c_{42} = -a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 - a_4b_2,$$
$$c_{43} = a_1b_2 - a_2b_1 - a_3b_4 - a_4b_3, \quad c_{44} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4$$

atunci obținem

$$AB = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & a_4 & -a_1 \\ -a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ -a_4 & a_3 & -a_2 & a_3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ -b_2 & b_1 & -b_4 & b_3 \\ -b_3 & b_4 & b_1 & -b_2 \\ -b_4 & -b_3 & b_2 & b_1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{Vmatrix}$$

$$BA = \begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ -b_2 & b_1 & -b_4 & b_3 \\ -b_3 & b_4 & b_1 & -b_2 \\ -b_4 & -b_3 & b_2 & b_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ -a_3 & -a_4 & a_1 & \\ -a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{Vmatrix}$$

ceea ce arată că $AB = BA$, adică matricile A și B sînt permutabile între ele.

46. Să se afle rangul matricii

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 0 & -2 & -6 \end{Vmatrix}$$

R. Observăm că dacă din linia a doua scădem prima linie, obținem linia a treia, de unde rezultă că toți minorii de ordinul trei sînt nuli, deci rangul matricii A este cel mult doi.

Deoarece minorul de ordinul doi $\begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix} = -14$ este diferit de zero, rezultă că rangul matricii A este egal cu 2.

Scanned with OKEN Scanner

47. Să se calculeze puterea a „n"-a a matricii

$$A = \begin{Vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{Vmatrix}.$$

R. Avem succesiv

$$A^2 = A \cdot A = \begin{Vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{Vmatrix} =$$

$$\begin{Vmatrix} \cos^2 x & -\sin^2 x & 2\sin x & \cos x \\ -2\sin x & \cos x & \cos^2 x & -\sin^2 x \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{Vmatrix}$$

Să presupunem prin inducție completă că avem

$$A^{n-1} = \begin{Vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{Vmatrix}^{n-1} = \begin{Vmatrix} \cos(n-1)x & \sin(n-1)x \\ -\sin(n-1)x & \cos(n-1)x \end{Vmatrix}.$$

Urmărim să arătăm acum că

$$A^n = \begin{Vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{Vmatrix}^n = \begin{Vmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{Vmatrix}$$

Ținînd seama de ipoteza inductivă, putem scrie succesiv

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{Vmatrix} \cos(n-1)x & \sin(n-1)x \\ -\sin(n-1)x & \cos(n-1)x \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos(n-1)x\cos x - \sin(n-1)x\sin x, & \cos(n-1)x\sin x + \sin(n-1)x\cos x \\ -\sin(n-1)x\cos x - \cos(n-1)x\sin x, & \cos(n-1)x\cos x - \sin(n-1)x\sin x \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{Vmatrix}$$

ceea ce era de demonstrat.

48. Să se arate că matricea

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

este nesingulară și să se afle inversa sa. Verificare!

R. Calculăm determinantul matricii A. Avem

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 + 6 + 27 + 1 + 8 = 42 \neq 0$$

de unde rezultă că matricea A este nesingulară.

Dacă notăm cu $\widetilde{A}$ transpusa matricii A, obținem

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$$

Matricea A^{-1}, inversa matricii A, este atunci

$$A^{-1} = \frac{1}{42} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix}$$

unde A_{ij}, $(i, j = 1, 2, 3)$, este complementul algebric al elementului a_{ji} din $\det(A)$, deci avem

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7.$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

Rezultă astfel că

$$A^{-1} = \frac{1}{42} \cdot \begin{Vmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{Vmatrix}$$

Verificare. Avem

$$AA^{-1} = \frac{1}{42} \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{Vmatrix} = \frac{1}{42} \begin{Vmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{42} \begin{Vmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{42} \begin{Vmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E$$

unde am notat cu E matricea unitate de ordinul trei.

Scanned with OKEN Scanner

49. Să se rezolve ecuațiile matriciale următoare și să se facă verificarea

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot X = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix}, \qquad Y \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$$

R. Dacă notăm

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$$

atunci ecuațiile date se scriu respectiv

$$AX = B, \quad YA = B$$

Conform exercițiului precedent, matricea A^{-1} există și avem

$$A^{-1} = \frac{1}{42} \begin{Vmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{Vmatrix}.$$

Înmulțind ecuațiile matriciale date cu A^{-1} la stînga, respectiv la dreapta, obținem

$$X = A^{-1}B, \qquad Y = BA^{-1}$$

astfel că dacă înlocuim pe A^{-1} și B, obținem respectiv soluțiile

$$X = \frac{1}{42} \begin{Vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{42} \begin{Vmatrix} 0 & 42 & 0 \\ -18 & -12 & 48 \\ 30 & 6 & 18 \end{Vmatrix} = \frac{1}{7} \begin{Vmatrix} 0 & 7 & 0 \\ -3 & -2 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \end{Vmatrix},$$

$$Y = \frac{1}{42} \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{Vmatrix} = \frac{1}{42} \begin{Vmatrix} 8 & 38 & -14 \\ 18 & 12 & 42 \\ 32 & -16 & -14 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{21} \begin{Vmatrix} 4 & 19 & -7 \\ 9 & 6 & 21 \\ 16 & -8 & -7 \end{Vmatrix}.$$

Verificare. Avem succesiv

$$AX = \frac{1}{7} \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 23 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 7 & 0 \\ -3 & -2 & 8 \\ 5 & 1 & 23 \end{Vmatrix} = \frac{1}{7} \begin{Vmatrix} 21 & 14 & -7 \\ -14 & 7 & 21 \\ 7 & -21 & 14 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix} = B$$

Scanned with OKEN Scanner

$$YA = \frac{1}{21}\begin{Vmatrix} 4 & 19 & -7 \\ 9 & 6 & 21 \\ 16 & -8 & -7 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{21}\begin{Vmatrix} 63 & 42 & -21 \\ -42 & 21 & 63 \\ 21 & -63 & 42 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix} = B$$

50. Să se arate că matricea reală

$$M(x, y) = \begin{Vmatrix} x & y \\ y & x \end{Vmatrix}$$

satisface relația funcțională

$$M(x_1, y_1) \cdot M(x_2, y_2) = M(x_1x_2 + y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$$

și să se deducă de aici identitatea algebrică

$$(x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2) = (x_1x_2 + y_1y_2)^2 - (x_1y_2 + x_2y_1)^2$$

Avem succesiv

$$M(x_1, y_1) \cdot M(x_2, y_2) = \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1x_2 + y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_1x_2 + y_1y_2 \end{Vmatrix} =$$

$$= M(x_1x_2 + y_1y_2,\quad x_1y_2 + x_2y_1)$$

Ținînd seama de formulele

$$\det [M(x, y)] = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 - y^2,\ \det [M(x_1, y_1) \cdot M(x_2, y_2)] =$$

$$= \det [M(x_1, y_1)] \cdot \det [M(x_2, y_2)],$$

rezultă, avînd în vedere relația funcțională, că avem

$$\det [M(x_1, y_1)] \cdot \det [M(x_2, y_2)] = \det [M(x_1x_2 + y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)]$$

Deducem astfel de aici identitatea enunțată și anume

$$(x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2) = (x_1x_2 + y_1y_2)^2 - (x_1y_2 + x_2y_1)^2$$

Observație. Din această identitate algebrică rezultă următoarea proprietate a numerelor naturale: produsul a două diferențe de pătrate de numere naturale se poate scrie ca diferența a două pătrate de numere naturale.

Astfel, dacă înlocuim $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 3$, $y_2 = 4$ în identitatea menționată, obținem

$$(1^2 - 2^2)(3^2 - 4^2) = 11^2 - 10^2$$

51. Se dau matricile

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze produsul AB.

R. Avem

$$AB = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = 0$$

Observație. Fiecare din matricile A, B este diferită de matricea nulă și totuși produsul lor AB este matricea nulă. Aceasta se exprimă spunînd că mulțimea (inelul) matricilor pătrate are divizori ai lui zero, adică produsul a două matrici pătrate poate fi egal cu matricea zero, fără ca nici unul din factorii săi să fie matricea zero.

52. Se dau matricile

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad 0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

și polinomul în nedeterminata λ definit în felul următor

$$P(\lambda) = \det (A - \lambda E)$$

Se cere să se găsească expresia acestui polinom și să se arate că $P(A) = 0$.

R. Avem succesiv

$$A - \lambda E = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} - \lambda \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{Vmatrix},$$

$$P(\lambda) = \det (A - \lambda E) = \begin{Vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2,$$

$$P(A) = A^2 - 5A - 2E = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} - 5 \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} - 2 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 22 & 15 \\ 10 & 7 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 20 & 15 \\ 10 & 5 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = 0$$

Observație. Matricea $A - \lambda E$ se numește λ — matrice sau matrice polinomială, $P(\lambda) = \det (A - \lambda E)$ se numește polinomul caracteristic al matricii A.

Faptul că $P(A) = 0$ se exprimă spunînd că matricea A este o rădăcină a polinomului său caracteristic. Menționăm în sfîrșit că

$$P(A) = A^2 - 5A - 2E$$

este un polinom de gradul 2 în nedeterminata (matricea) A.

53. Să se arate că matricea complexă

$$M(x, y) = \begin{Vmatrix} x & y \\ \overline{y} & \overline{x} \end{Vmatrix}$$

verifică relația

$$M(x_1, y_1) \cdot M(x_2, y_2) = M(x_1x_2 + y_1\overline{y}_2,\ x_1y_2 + \overline{x}_2y_1)$$

Scanned with OKEN Scanner

și să se deducă de aici identitatea algebrică

$$(|x_1|^2 - |y_1|^2)(|x_2|^2 - |y_2|^2) = |x_1x_2 + y_1\overline{y}_2|^2 - |x_1y_2 + \overline{x}_2y_1|^2$$

unde $\overline{z}$ înseamnă conjugatul numărului complex z, iar $|z|$ înseamnă modulul lui z, adică $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

R. Avem

$$M(x_1, y_1) \cdot M(x_2, y_2) = \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 \\ \overline{y}_1 & \overline{x}_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_2 & y_2 \\ \overline{y}_2 & \overline{x}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1x_2 + y_1\overline{y}_2 & x_1y_2 + \overline{x}_2y_1 \\ \overline{x}_1\overline{y}_2 + x_2\overline{y}_1 & \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{y}_1y_2 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \overline{x_1x_2 + y_1\overline{y}_2} & \overline{x_1y_2 + \overline{x}_2y_1} \\ x_1y_2 + \overline{x}_2y_1 & x_1x_2 + y_1\overline{y}_2 \end{Vmatrix} = M(x_1x_2 + y_1\overline{y}_2, x_2y_2 + \overline{x}_2y_1)$$

Dacă în această relație funcțională luăm determinanții în ambii membri și ținem seama că $\det [M(x, y)] = |x|^2 - |y|^2$, obținem

$$(|x_1|^2 - |y_1|^2)(|x_2|^2 - |y_2|^2) = |x_1x_2 + y_1\overline{y}_2|^2 - |x_1y_2 + \overline{x}_2y_1|^2$$

adică tocmai identitatea menționată în enunț.

Observație. Dacă în această identitate facem înlocuirile

$$x_h = a_h + ib_h, \quad y_h = c_h + id_h, \quad (a_h, b_h, c_h, d_h \in \mathbf{R}, \ h = 1, 2; \ i = \sqrt{-1})$$

atunci obținem următoarea identitate algebrică (în real) și anume

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2 - d_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2)^2 +$$

$$+ (a_1b_2 + a_2b_1 + c_2d_1 - c_1d_2)^2 - (a_1c_2 + a_2c_1 + b_2d_1 - b_1d_2)^2 +$$

$$(a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)^2$$

54. Să se afle inversa matricii cu elemente complexe

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & i & -i^2 \\ i^3 & -i^4 & i^5 \\ -i^6 & i^7 & i^8 \end{Vmatrix}, \quad (i = \sqrt{-1})$$

R. Ținînd seama că $-i^2 = 1$, rezultă că matricea A se mai scrie

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & -1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{Vmatrix}$$

Determinantul matricii A are valoarea

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & -1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu $\widetilde{A}$ transpusa matricii A, avem

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & -1 & -i \\ 1 & i & 1 \end{Vmatrix}$$

Dacă A_{jk} este complementul algebric al elementului a_{kj}, rezultă

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -i \\ i & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2i, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{vmatrix} = 2i, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{vmatrix} = -2i,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{vmatrix} = 2i, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

astfel încît matricea A^{-1} are expresia

$$A = \frac{1}{\det(A)} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{Vmatrix} -2 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & -2i \\ 0 & 2 & -2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 1 \end{Vmatrix}$$

Verificare

$$AA^{-1} = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & -1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & -1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

DETERMINANȚI

55. Să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+y & y+z & z+x \\ xy & yz & zx \end{vmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

punîndu-se rezultatul sub formă de produs de factori. Să se deducă apoi valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(x+y) & \cos(y+z) & \cos(z+x) \\ \cos(x-y) & \cos(y-z) & \cos(z-x) \\ \sin(x+y) & \sin(y+z) & \sin(z+x) \end{vmatrix}$$

R. În determinantul D, scăzînd prima coloană din ultimele două, obţinem

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & z-x & z-y \\ xy & y(z-x) & x(z-y) \end{vmatrix} = -(x-y)(y-z)(z-x)$$

În determinantul Δ dezvoltăm funcţiile trigonometrice şi împărţim coloana întîi, a doua şi a treia respectiv cu $\cos x \cos y$, $\cos y \cos z$, $\cos z \cos x$. Avem

$$\Delta = \cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z \cdot \begin{vmatrix} 1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y & 1-\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z & 1-\operatorname{tg} z \operatorname{tg} x \\ 1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y & 1+\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z & 1+\operatorname{tg} z \operatorname{tg} x \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y & \operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z & \operatorname{tg} z+\operatorname{tg} x \end{vmatrix}$$

Adunăm prima linie la a doua şi rezultatul împărţit cu 2 îl adunăm la prima linie. Obţinem succesiv

$$\Delta = -2\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z \cdot \begin{vmatrix} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y & \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z & \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x \\ 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y & \operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z & \operatorname{tg} z+\operatorname{tg} x \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y & \operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z & \operatorname{tg} z+\operatorname{tg} x \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y & \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z & \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x \end{vmatrix}.$$

În baza valorii găsite pentru D, avem

$$\Delta = 2\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)(\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} z)(\operatorname{tg} z - \operatorname{tg} x) =$$
$$= 2\sin(x-y)\sin(y-z)\sin(z-x).$$

56. Să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

punîndu-se rezultatul sub formă de produs de factori.

Scanned with OKEN Scanner

R. Scăzînd coloana întîi din celelalte și dezvoltînd determinantul obținut, obținem succesiv

$$D = \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \\ b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+ad+d^2 \\ b^3+ab^2+a^2b+a^3 & c^3+ac^2+a^2c+a^3 & d^3+ad^2+a^2d+a^3 \end{vmatrix}.$$

Scăzînd coloana întîi din celelalte două și dezvoltînd după prima linie, avem

$$D = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c^2-b^2+a(c-b) & d^2-b^2+a(d-b) \\ c^3-b^3+a(c^2-b^2)+a^2(c-b) & d^3-b^3+a(d^2-b^2)+a^2(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+d \\ b^2+bc+c^2 & b^2+bd+d^2 \end{vmatrix}$$

Scăzînd coloana întîi din a doua, obținem în definitiv

$$D = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(c-d)(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

57. Să se demonstreze identitatea

$$\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix} = (x-a+b+c)(x-b+a+c)(x-c+a+b)(x+a+b+c)$$

R. Adunăm toate liniile la prima linie și obținem

$$D = (a+b+c-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$$

Scăzînd coloana întîi din celelalte, avem

$$D = (a+b+c-x)\begin{vmatrix} -x-a & c-a & b-a \\ c-b & -x-b & a-b \\ b-c & a-c & -x-c \end{vmatrix}$$

Adunăm coloana a treia la prima coloană și scădem coloana a doua din prima coloană. Rezultă

$$D = (a+b+c-x)(x-b+a+c)\begin{vmatrix} -1 & c-a & b-a \\ 1 & -x-b & a-b \\ -1 & a-c & -x-c \end{vmatrix}$$

Adunînd linia a doua la prima linie și scăzînd prima linie din a treia, avem

$$D = (a+b+c-x)(x-b+a+c)\begin{vmatrix} -1 & c-a & b-a \\ 0 & -x-b-a+c & 0 \\ 0 & 2(a-c) & -x-c-b+a \end{vmatrix}$$

de unde rezultă în definitiv

$$D = (x-a+b+c)(x-b+a+c)(x-c+a+b)(x-a-b-c)$$

unde am notat cu D determinantul inițial.

58. Să se descompună în factori determinantul

$$D = \begin{vmatrix} (a+\alpha)^2 & (a+\beta)^2 & (a+\gamma)^2 \\ (b+\alpha)^2 & (b+\beta)^2 & (b+\gamma)^2 \\ (c+\alpha)^2 & (c+\beta)^2 & (c+\gamma)^2 \end{vmatrix}.$$

R. Scădem linia a doua din prima linie și linia a treia din linia a doua și obținem

$$D = (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a+b+2\alpha & a+b+2\beta & a+b+2\gamma \\ b+c+2\alpha & b+c+2\beta & b+c+2\gamma \\ (c+\alpha)^2 & (c+\beta)^2 & (c+\gamma)^2 \end{vmatrix}$$

Scădem din nou linia a doua din prima linie și avem

$$D = (a-b)(b-c)(a-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c+2\alpha & b+c+2\beta & b+c+2\gamma \\ (c+\alpha)^2 & (c+\beta)^2 & (c+\gamma)^2 \end{vmatrix}$$

Scădem acum prima coloană din coloana a doua și a treia. Obținem succesiv

$$D = (a-b)(b-c)(a-c)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c+2\alpha & 2 & 2 \\ (c+\alpha)^2 & 2c+\alpha+\beta & 2c+\alpha+\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(b-c)(a-c)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2c+\alpha+\beta & 2c+\alpha+\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= 2(a-b)(b-c)(c-a)(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta).$$

59. Să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & +c \\ -c & +d & a & -b \\ -d & -c & +b & a \end{vmatrix}$$

R. Notăm $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = x$ și calculăm D^2. Obținem

$$D^2 = DD^* = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & a & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= x^4 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4,$$

unde D^* este determinantul transpus al determinantului D, $(D^* = D)$. Avem deci $D = \varepsilon(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, $(\varepsilon = \pm 1)$.

Pentru determinarea lui ε, luăm $a = 1$, $b = c = d = 0$ și obținem

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Pe de altă parte avem $D = \varepsilon(1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2) = \varepsilon$, de unde rezultă $\varepsilon = 1$. Deci

$$D = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

60. Să se calculeze determinantul

$$D(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}.$$

R. Notăm $x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ și calculăm $D^2(a, b, c, d)$. Avem

$$D^2(a, b, c, d) = D(a, b, c, d) \cdot D^*(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^4 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4,$$

unde $D^*(a, b, c, d)$ este determinantul transpus al lui $D(a, b, c, d)$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că

$$D(a,\ b,\ c,\ d) = \varepsilon(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2, \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Pentru determinarea lui ε, calculăm în două moduri $D(1,\ 0,\ 0,\ 0)$. Avem

$$D(1,\ 0,\ 0,\ 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad D(1,\ 0,\ 0,\ 0) = \varepsilon$$

de unde obținem $\varepsilon = -1$. Rezultă astfel că

$$D(a,\ b,\ c,\ d) = -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

61. Fie ω o rădăcină cubică complexă a unității. Să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}^2$$

R. Adunînd toate liniile la prima linie și ținînd seama că $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, $\omega^3 - 1 = 0$; $\omega \neq 0$), obținem succesiv

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega & \omega^2 & 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega & \omega^2 - \omega & 1 - \omega & 1 - \omega \\ \omega^2 & 1 - \omega^2 & 1 - \omega^2 & \omega - \omega^2 \\ 1 & 0 & \omega - 1 & \omega^2 - 1 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= (1-\omega)^6 \begin{vmatrix} -\omega & 1 & 1 \\ 1+\omega & 1+\omega & \omega \\ 0 & -1 & -1-\omega \end{vmatrix}^2$$

Dezvoltînd ultimul determinant după prima coloană, avem în continuare

$$D = (1-\omega)^6 (\omega^2 + \omega)^2 = (1-2\omega + \omega^2)^3 = (-3\omega)^3 = -27\omega^3 = -27.$$

Observație. Se mai poate calcula D făcînd produsul determinantului Δ prin el însuși, unde Δ este legat de D prin relația $D = \Delta^2$ și ținînd seama că $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$.

62. Să se arate că orice determinant antisimetric de ordin impar peste corpul numerelor reale sau complexe este egal cu zero.

R. Un determinant $D_n = |a_{ij}|$, $(i, j = 1,\ldots,n)$, se zice antisimetric dacă avem $a_{ij} = -a_{ji}$, $(i,\ j = 1,\ldots,n)$. Rezultă că avem $a_{ii} = -a_{ii}$, adică $a_{ii} = 0$,

Scanned with OKEN Scanner

deci elementele de pe diagonala principală sînt nule, iar elementele simetrice față de această diagonală sînt egale în valoare absolută și de semn contrar.

Deci un determinant antisimetric de ordinul n are forma

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Deoarece un determinant este egal cu determinantul său transpus, avem

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \dots & -a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Înmulțind fiecare linie (sau coloană) cu -1, obținem succesiv

$$D_n = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D_n = -D_n \quad (n = 2m+1,\ m \in N)$$

de unde rezultă $2D_n = 0$, adică $D_n = 0$, ceea ce era de demonstrat.

63. Să se calculeze determinantul

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

numit determinant diagonal (elementele situate deasupra diagonalei principale sînt nule).

R. Dezvoltînd după prima linie obținem relația

$$D_n = a_{11}\Delta_{n-1}$$

unde Δ_{n-1} este tot un determinant diagonal. Rezultă astfel că avem

$$D_n = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

64. Să se calculeze determinantul

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

numit determinant Van der Monde, punîndu-se rezultatul sub formă de produs de factori.

R. Înmulţind prima coloană cu -1 şi adunînd la celelalte coloane, obţinem succesiv

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a & d+a \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}.$$

Înmulţim din nou prima coloană cu -1 şi adunînd la celelalte, avem

$$V = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2+ab+b^2 & c^2-b^2+a(c-b) & d^2-b^2+a(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+d \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

65. Să se calculeze determinantul de ordinul n

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

R. Adunînd toate liniile la prima linie şi scoţînd factor comun pe $x + (n-1)$, obţinem

$$D_n = [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulţim apoi prima coloană cu -1 şi adunînd la celelalte coloane, obţinem

$$D_n = [x(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & x-a & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

66. Să se calculeze determinantul de ordinul n

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a & a \\ -a & -a & -a & \dots & x & a & a \\ -a & -a & -a & \dots & -a & x & a \\ -a & -a & -a & \dots & -a & -a & x \end{vmatrix}.$$

R. Scăzînd prima coloană din celelalte $n-1$ coloane, obţinem

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a-x & a-x & \dots & a-x & a-x & a-x \\ -a & a+x & 2a & \dots & 2a & 2a & 2a \\ -a & 0 & a+x & \dots & 2a & 2a & 2a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a & 0 & 0 & \dots & a+x & 2a & 2a \\ -a & 0 & 0 & \dots & 0 & a+x & 2a \\ -a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a+x \end{vmatrix}$$

Dezvoltăm după elementele coloanei a doua şi avem

$$D_n = (x-a)\begin{vmatrix} -a & 2a & \dots & 2a & 2a & 2a \\ -a & a+x & \dots & 2a & 2a & 2a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a & 0 & & a+x & 2a & 2a \\ -a & 0 & \dots & 0 & a+x & 2a \\ -a & 0 & \dots & 0 & 0 & a+x \end{vmatrix} +$$

$$+ (a+x)\begin{vmatrix} x & a-x & \dots & a-x & a-x \\ -a & a+x & \dots & 2a & 2a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & 0 & \dots & 2a & 2a \\ -a & 0 & \dots & a+x & 2a \\ -a & 0 & \dots & 0 & a+x \end{vmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm acum, în primul rînd, că ultimul determinant este egal cu D_{n-1}. În primul din aceşti determinanţi vom scoate pe $-a$ factor comun şi apoi vom scădea prima linie din celelalte $n-2$ linii. Obţinem aşadar

$$D_n = -a(x-a)\begin{vmatrix} 1 & 2a & \dots & 2a & 2a & 2a \\ 0 & x-a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -2a & \dots & x-a & 0 & 0 \\ 0 & -2a & \dots & -2a & x-a & 0 \\ 0 & -2a & \dots & -2a & -2a & x-a \end{vmatrix} + (x+a)\,D_{n-1}$$

Dezvoltînd după elementele primei coloane şi observînd că determinantul de ordinul $n-2$ care rămîne este un determinant diagonal, obţinem relaţia de recurenţă

$$D_n = (x+a)\,D_{n-1} - a(x-a)^{n-1}, \quad (n \geqslant 2)$$

Dînd lui n valorile 2, 3, ..., $n-1$, n, obţinem relaţiile

$$D_2 = (x+a)\,D_1 - a(x-a)$$
$$D_3 = (x+a)\,D_2 - a(x-a)^2$$
$$D_4 = (x+a)\,D_3 - a(x-a)^3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$D_{n-1} = (x+a)D_{n-2} - a(x-a)^{n-2}$$
$$D_n = (x+a)D_{n-1} - a(x-a)^{n-1}$$

Înmulţim apoi prima relaţie cu $(x+a)^{n-2}$, a doua relaţie cu $(x+a)^{n-3}$ a treia relaţie cu $(x+a)^{n-4}$, ..., penultima relaţie cu $(x+a)$ şi ultima relaţie cu 1 şi adunăm membru cu membru. Obţinem

$$D_n = (x+a)^{n-1}\cdot D_1 - a(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-2}(x+a) + \dots + (x-a)\,(x+a)^{n-2}$$

Din expresia iniţială a lui D_n rezultă că $D_1 = |x| = x$, astfel că obţinem

$$D_n = x(x+a)^{n-1} - a[(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-2}(x+a) +$$
$$+ \dots + (x-a)\,(x+a)^{n-2} + (x+a)^{n-1}] + a(x+a)^{n-1} =$$
$$= (x+a)^n - a\cdot\frac{(x-a)^n - (x+a)^n}{x-a-(x+a)} = (x+a)^n + \frac{(x-a)^n - (x+a)^n}{2}$$

Rezultă în definitiv că D_n are expresia

$$D_n = \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2}$$

67. Să se calculeze produsul determinanţilor

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Determinantul de ordinul doi D_2 este egal cu următorul determinant Δ_3 de ordinul trei și anume

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_3$$

așa cum se constată ușor dezvoltînd Δ_3 după elementele ultimei linii.

Rezultă că avem succesiv

$$D_3D_2 = D_3\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -7 & -8 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \end{vmatrix}.$$

Verificare. Calculăm direct D_3, D_2 și D_3D_2. Avem succesiv

$$D_3 = -6 + 6 + 6 + 27 + 8 + 1 = 42, \qquad D_2 = 4 - 6 = -2$$

$$D_3D_2 = 2\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -7 & -8 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2(40 + 18 - 105 + 72 - 25 - 42) = -84$$

și se observă că $(42 - 2) = -84$.

SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

68. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ 2x + 3y + z = 11, \\ 3x + y + 2z = 11. \end{cases}$$

R. Determinantul sistemului este

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 6 - 27 - 1 - 8 = -18$$

Deoarece D este diferit de zero, rezultă că sistemul dat este compatibil. Aplicînd regula lui Cramer, obținem

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

unde D_x, D_y, D_z sînt următorii determinanți

$$D_x = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 11 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix} = -36, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 54$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că soluția (unică) a sistemului dat este

$$x = \frac{-18}{-18} = 1, \quad y = \frac{-36}{-18} = 2, \quad z = \frac{-54}{-18} = 3.$$

69. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = k, \\ a^2x + b^2y + c^2z = k^2, \end{cases}$$

în ipoteza $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$.

R. Determinantul sistemului este determinantul Van der Monde

$$V_3(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b),$$

care este diferit de zero deoarece am presupus că $b - a \neq 0$, $c - a \neq 0$, $c - b \neq 0$, deci sistemul dat este compatibil și are soluție unică dată de regula lui Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & b & c \\ k^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}{V_3(a, b, c)} = \frac{V_3(k, b, c)}{V_3(a, b, c)} = \frac{(b-k)(c-k)(c-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{(b-k(c-k)}{(b-a)(c-a)},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & k & c \\ a^2 & k^2 & c^2 \end{vmatrix}}{V_3(a, b, c)} = \frac{V_3(a, k, c)}{V_3(a, b, c)} = \frac{(k-a)(c-a)(c-k)}{(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{(k-a)(c-k)}{(b-a)(c-b)},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & k \\ a^2 & b^2 & k^2 \end{vmatrix}}{V_3(a, b, c)} = \frac{V_3(a, b, k)}{V_3(a, b, c)} = \frac{(b-a)(k-a)(k-b)}{(b-a)(c-a)(c-b)} = \frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

70. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

R. Determinantul sistemului este

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

deci sistemul este compatibil determinat, soluţia fiind dată de regula lui Cramer

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{2}{2} = 1. \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \\ 8 & 12 & -3 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 8 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-2}{2} = -1. \quad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-2}{2} = -1.$$

71. Să se rezolve sistemul liniar neomogen

$$\begin{cases} ax - by = A \\ bx + ay = B \\ cx + dy + az - bt = C \\ dx - cy + bz + at = D \end{cases}$$

în ipoteza că a, b nu sînt nule în acelaşi timp.

R. Calculăm determinantul Δ al sistemului. Avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2)^2 \neq 0$$

Sistemul este deci compatibil determinat, soluţia sa fiind dată de regula Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A & -b & 0 & 0 \\ B & a & 0 & 0 \\ C & d & a & -b \\ D & -c & b & a \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{aA + bB}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & A & 0 & 0 \\ b & B & 0 & 0 \\ c & C & a & -b \\ d & D & b & a \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{aB - bA}{a^2 + b^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & -b & A & 0 \\ b & a & B & 0 \\ c & d & C & -b \\ d & -c & D & a \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{aC + bD - cA - dB}{a^2 + b^2}, \quad t = \frac{\begin{vmatrix} a & -b & 0 & A \\ b & a & 0 & B \\ c & d & a & C \\ d & -c & b & D \end{vmatrix}}{\Delta} =$$

$$= \frac{aD - bC + cB - dA}{a^2 + b^2}.$$

72. Să se cerceteze dacă sistemul

$$\begin{cases} x - y + 3z + t + 8 = 0 \\ 3x + y - z + 2t + 5 = 0 \\ 2x + 2y - 4z + t - 3 = 0 \end{cases}$$

are soluţii. În caz afirmativ să se rezolve.

R. Matricea A a coeficienţilor necunoscutelor

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \end{Vmatrix}$$

este de rangul doi, deoarece toţi determinanţii de ordinul trei sînt nuli.

Într-adevăr, scăzînd în matricea A linia întîi din linia a doua, obţinem linia a treia. Luînd ca determinant principal pe

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

avem un singur determinant caracteristic şi anume

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

care este nul deoarece adunînd prima linie cu linia a treia obţinem linia a doua. Deci sistemul dat este compatibil. Primele două ecuaţii şi primele două necunoscute fiind principale, să considerăm sistemul

$$\begin{cases} x - y = -3z - t - 8 \\ 3x + y = z - 2t - 5 \end{cases}$$

unde z, t sînt necunoscutele secundare. Aplicînd regula lui Cramer, obţinem

$$x = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -3z - t - 8 & -1 \\ z - 2t - 5 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2z + 3t + 13}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -3z - t - 8 \\ 3 & z - 2t - 5 \end{vmatrix} = \frac{10z + t + 19}{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece z, t figurează ca parametri, înseamnă că sistemul admite ∞^2 soluții. Înlocuind pe x și y în funcție de z și t în ultima ecuație, care este ecuația secundară, aceasta este verificată în mod identic, adică oricare ar fi z, t.

73. Să se discute după valorile parametrului real λ următorul sistem

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2\lambda x + \lambda^2 y - 3z = 3\lambda \end{cases}$$

și să se rezolve în cazurile de compatibilitate.

R. Matricea coeficienților necunoscutelor este

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2\lambda & \lambda^2 & 3 \end{Vmatrix}$$

iar determinantul acestei matrici

$$D_3(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2\lambda & \lambda^2 & 3 \end{Vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda - 9)$$

Se pot prezenta trei cazuri, și anume

I) $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 9$. Conform regulii Cramer, avem

$$x = \frac{1}{(1-\lambda)(\lambda-9)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3\lambda & \lambda^2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{15(\lambda-1)}{(1-\lambda)(\lambda-9)} = \frac{15}{9-\lambda},$$

$$y = \frac{1}{(1-\lambda)(\lambda-9)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2\lambda & 3\lambda & 3 \end{vmatrix} = \frac{3(1-\lambda)}{(1-\lambda)(\lambda-9)} = \frac{3}{\lambda-9},$$

$$z = \frac{1}{(1-\lambda)(\lambda-9)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2\lambda & \lambda^2 & 3\lambda \end{vmatrix} = \frac{\lambda(1-\lambda)}{(1-\lambda)(\lambda-9)} = \frac{\lambda}{9-\lambda}.$$

II) $\lambda = 1$. În acest caz, sistemul devine

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

Matricea coeficienților necunoscutelor

$$A(1) = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

are rangul doi. Luăm, de exemplu, ca determinant principal pe

$$\Delta_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} = -3$$

Singurul determinant caracteristic este

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

deci sistemul este compatibil. Necunoscutele principale sînt x și y, iar z este necunoscuta secundară. Avem ∞^1 soluții date de regula Cramer

$$x = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ 2-2z & 2 \end{vmatrix} = \frac{5}{3}(1-z), \quad y = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & 2-2z \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(z-1)$$

III) $\lambda = 9$. În acest caz, sistemul se scrie

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ x - y + 2z = 2, \\ 6x + 27y + z = 9. \end{cases}$$

Matricea coeficienților necunoscutelor este

$$A(9) = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & 27 & 1 \end{Vmatrix}$$

și are rangul doi. Putem lua, de exemplu, ca determinant principal tot pe

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Unicul determinant caracteristic

$$\Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 6 & 27 & -9 \end{vmatrix} = 24$$

fiind diferit de zero, rezultă că sistemul este, pentru $\lambda = 9$, incompatibil.

Scanned with OKEN Scanner

74. Să se discute și rezolve sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \lambda \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -3 \\ 3x_1 + \lambda(\lambda+1)x_2 - 4x_3 = \lambda - 1 \\ x_1 + 2\mu x_2 - 2x_3 = 2(\mu-1) \end{cases}$$

unde λ, μ sînt parametri reali.

R. Matricea coeficienților necunoscutelor este

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & \lambda(\lambda+1) & -1 \\ 1 & 2\mu & -2 \end{Vmatrix}$$

Rangul matricei A este trei, oricare ar fi λ, μ, deoarece putem lua ca determinant principal

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Pentru ca sistemul să fie compatibil trebuie ca toți determinanții caracteristici să fie nuli. Avem doi determinanți caracteristici și anume

$$C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & \lambda \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 3 & \lambda(\lambda+1) & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(5\lambda^2 + 11\lambda + 12),$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & \lambda \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2\mu & -2 & 2(\mu-1) \end{vmatrix}.$$

Anulînd pe C_1, găsim singura rădăcină reală $\lambda = 1$ și pentru această valoare a lui λ, determinantul C_2 are valoarea $C_2 = 16(1-2\mu)$, care se anulează pentru $\mu = \frac{1}{2}$. Deci, pentru $\lambda=1$, $\mu = \frac{1}{2}$ sistemul este compatibil determinat.

Rezolvînd în acest caz, sistemul format din primele trei ecuații, obținem soluția

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\lambda \neq 1$ sau $\mu \neq \frac{1}{2}$, atunci sistemul este incompatibil.

75. Să se discute şi să se rezolve sistemul

$$(D) \quad \frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

$$(P) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

interpretîndu-se rezultatul geometric.

R. Putem scrie sistemul în modul următor

$$\begin{cases} nx - lz - na + lc = c \\ ny - mz - nb + mc = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Determinantul sistemului este

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & 0 & -l \\ 0 & n & -m \\ A & B & C \end{vmatrix} = n(Al + Bm + Cn)$$

şi dacă $\Delta \neq 0$ atunci dreapta (D) şi planul (P) se intersectează într-un punct la distanţă finită avînd coordonatele

$$x = \frac{\begin{vmatrix} na - c & 0 & -l \\ nb - mc & n & -m \\ -D & B & C \end{vmatrix}}{n(Al + Bm + Cn)} = \frac{B(ma - lb) + C(na - lc) - Dl}{Al + Bm + Cn},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} n & na - lc & l \\ 0 & nb - mc & -m \\ A & -D & C \end{vmatrix}}{n(A + Bm + Cn)} = \frac{A(lb - ma) + C(nb - mc) - Dm}{Al + Bm + Cn},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} n & 0 & na - lc \\ 0 & n & nb - mc \\ A & B & -D \end{vmatrix}}{n(Al + Bm + Cn)} = \frac{A(lc - na) + B(mc - nb) - Dn}{Al + Bm + Cn}.$$

Dacă $\Delta = 0$, avem $Al + Bm + Cn = 0$, adică dreapta (D) este paralelă cu planul (P), deci sistemul nu admite soluţii finite decît dacă determinantul caracteristic

$$\delta = \begin{vmatrix} n & 0 & na - lc \\ 0 & n & nb - mc \\ A & B & -D \end{vmatrix} = -n[A(na - lc) + B(nb - mc) + Dn] = -n^2(Aa + Bb + Cc + D)$$

este nul, adică dacă avem relaţia

$$Aa + Bb + Cc + D = 0, \qquad (n \neq 0),$$

care exprimă că punctul $M_0(a, b, c)$ se găseşte în planul (P). În acest caz sistemul este compatibil nedeterminant deoarece toate punctele dreptei (D) verifică ecuaţia planului (P).

Scanned with OKEN Scanner

76. Să se cerceteze dacă sistemul

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$$

are soluţii. În caz afirmativ să se rezolve.

R. Matricea coeficienţilor necunoscutelor

$$A = \begin{Vmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 14 \end{Vmatrix}$$

are rangul doi. Într-adevăr, toţi cei 4 determinanţi de ordinul trei extraşi din matricea A sînt nuli, aşa cum se poate verifica uşor.

Luînd ca determinant principal pe

$$D = \begin{Vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{Vmatrix} = -1$$

avem un singur determinant caracteristic

$$C = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

Rezultă că sistemul dat este compatibil nedeterminat. Din primele două ecuaţii găsim

$$x_2 = 3x_1 - 13x_4 - 13,$$

unde x_1, x_4 sînt parametri, deci sistemul admite ∞^2 soluţii date de

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = 3\lambda - 13\mu - 13, \quad x_3 = -9\mu - 7, \quad x_4 = \mu.$$

77. Să se determine λ, astfel ca sistemul omogen

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ \lambda x - y - z = 0 \end{cases}$$

să admită şi alte soluţii în afară de soluţia banală $x=y=z=0$.

R. Pentru ca un sistem liniar şi omogen să admită şi soluţii nebanale, trebuie ca rangul matricii formate cu coeficienţii necunoscutelor să fie strict mai mic decît numărul necunoscutelor.

În cazul nostru trebuie ca rangul matricii

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \lambda & -1 & -1 \end{Vmatrix}$$

să fie cel mult egal cu 2. Punem atunci condiția

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \lambda & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

de unde rezultă $\lambda = -\frac{7}{5}$. Din primele două ecuații rezultă

$$x = -\frac{5}{3}z, \quad y = \frac{4}{3}z.$$

Dacă punem acum $z = 3\alpha$, obținem ∞^1 soluții date de formulele

$$x = -5\alpha, \quad y = 4\alpha, \quad z = 3\alpha$$

unde α este un parametru.

78. Să se afle λ și μ astfel încît sistemul omogen

$$\begin{cases} E_1 \equiv x + 3y + z = 0 \\ E_2 \equiv 2x - 5y + 3z = 0 \\ E_3 \equiv \lambda x - 2y + 4z = 0 \\ E_4 \equiv x + \mu y + 2z = 0 \end{cases}$$

să aibă și alte soluții în afară de soluția banală $x = y = z = 0$.

R. Trebuie să avem

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ \lambda & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & \mu & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \lambda & -2 & 4 \\ 1 & \mu & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \lambda & -2 & 4 \\ 1 & \mu & 2 \end{vmatrix} = 0$$

de unde rezultă $\lambda = 3$, $\mu = -8$. Din primele două ecuații avem

$$x = -\frac{14}{11}z, \quad y = \frac{1}{11}z,$$

iar dacă punem $z = 11\alpha$, rezultă

$$x = -14\alpha, \quad y = \alpha, \quad z = 11\alpha,$$

unde α este un parametru, deci avem ∞^1 soluții. Observăm că avem

$$E_3 \equiv E_1 + E_2, \quad E_4 \equiv -E_1 + E_2$$

unde $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ sînt ecuațiile principale, iar $E_3 = 0$, $E_4 = 0$ sînt ecuațiile secundare.

79. Să se rezolve sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

R. Matricea coeficienților necunoscutelor

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{Vmatrix}$$

are rangul doi, deoarece linia a treia se obține din linia a doua adunată cu prima linie înmulțită cu 2, iar linia a patra se obține scăzînd din linia a doua înmulțită cu 2 linia întîi, deci toți determinanții de ordinul trei și cel de ordinul patru sînt nuli.

Luînd ca determinant principal

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

înseamnă că ecuațiile principale sînt primele două ecuații, iar x_1, x_2 sînt necunoscutele principale. Rezolvînd, obținem soluția

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4, \quad x_2 = \frac{7}{2}x_3 - 2x_4$$

Dacă punem, de exemplu

$x_3 = 2\lambda$, $x_4 = \mu$, atunci putem scrie

$$x_1 = -3\lambda - \mu, \quad x_2 = 7\lambda - 2\mu, \quad x_3 = 2\lambda, \quad x_4 = \mu$$

unde λ, μ sînt parametri, deci sistemul dat admite ∞^2 soluții.

80. Să se afle condiția ca sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ bx + ay = 0 \\ cx - dy + az + bt = 0 \\ dx - cy + bz + at = 0 \end{cases}$$

să admită și soluții nebanale și apoi să se rezolve.

R. Punem condiția ca determinantul sistemului să fie nul, deci

$$\begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & -d & a & b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} = 0$$

Dezvoltînd, obținem succesiv

$$(a^2-b^2)^2 = 0, \quad a^2-b^2 = 0, \quad b = \varepsilon a \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

Înlocuind $b = \varepsilon a$ în sistem și calculînd rangul matricei coeficienților necunoscutelor găsim că acest rang este egal cu doi.

Scanned with OKEN Scanner

Luăm apoi ca determinant principal

$$D = \begin{vmatrix} c & -d \\ d & -c \end{vmatrix} = d^2 - c^2 \neq 0$$

și rezolvînd necunoscutele principale x, y din ultimele două ecuații în funcție de necunoscutele secundare z, t obținem soluția

$$x = -\frac{a}{c + \varepsilon d}(z + \varepsilon t), \quad y = \frac{\varepsilon a}{c + \varepsilon d}(z + \varepsilon t), \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

unde z, t sînt parametri, deci sistemul admite ∞^2 soluții pentru $b = \varepsilon a$.

81. Să se rezolve prin metoda matriceală sistemul liniar neomogen

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x + 2y - 4z = 9 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

Dacă introducem matricele

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad X = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{Vmatrix}$$

atunci sistemul dat se scrie sub formă matriceală astfel

$$AX = B.$$

Deoarece avem

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

rezultă că matricea A este nesingulară, deci există A^{-1}.

Înmulțind ecuația matriceală de mai sus cu A^{-1} la stînga, obținem

$$X = A^{-1}B.$$

Matricea inversă A^{-1} este

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{Vmatrix}$$

astfel încît obținem

$$X = \begin{Vmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

de unde rezultă în definitiv că $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$

Scanned with OKEN Scanner

82. Să se afle ecuaţia planului care trece prin punctele $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(2, 3, 1)$, $P_2(3, 1, 2)$.

Ecuaţia generală a planului este

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

R. Punînd condiţia ca acest plan să treacă prin punctele date, obţinem

$$\begin{cases} A + 2B + 3C + D = 0 \\ 2A + 3B + C + D = 0 \\ 3A + B + 2C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 2B + 3C = -D \\ 2A + 3B + C = -D \\ 3A + B + 2C = -D \end{cases}$$

Rezolvînd pe A, B, C în funcţie de D, ceea ce este posibil deoarece

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 6 - 27 - 8 + 1 = -18 \neq 0$$

se găseşte succesiv, aplicînd regula lui Cramer

$$A = -\frac{1}{18}\begin{vmatrix} -D & 2 & 3 \\ -D & 3 & 1 \\ -D & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{D}{18}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{D}{18}(6 + 2 + 3 - 9 - 4 - 1) = -\frac{D}{6}$$

$$B = -\frac{1}{18}\begin{vmatrix} 1 & -D & 3 \\ 2 & -D & 1 \\ 3 & -D & 2 \end{vmatrix} = \frac{D}{18}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{D}{18}(2 + 3 + 6 - 9 - 4 - 1) = -\frac{D}{6}$$

$$C = -\frac{1}{18}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -D \\ 2 & 3 & -D \\ 3 & 1 & -D \end{vmatrix} = \frac{D}{18}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{D}{18}(3 + 6 + 2 - 9 - 1 - 4) = -\frac{D}{6}$$

Deoarece A, B, C nu pot fi toţi nuli, rezultă $D \neq 0$, astfel că înlocuind în ecuaţia generală a planului şi simplificînd cu D, obţinem

$$x + y + z - 6 = 0$$

care este ecuaţia planului căutat.

Observaţie. Ecuaţia planului ce trece prin punctele date se mai poate obţine anulînd determinantul următor

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dezvoltînd se obţine aceeaşi ecuaţie, şi anume

$$x + y + z - 6 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

83. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $P_0(3, 2, 1)$ și este perpendicular pe vectorul $\vec{N} = (1, 2, 3)$.

R. Știm că ecuația planului ce trece printr-un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ și este perpendicular pe vectorul $\vec{N} = (A, B, C)$ este următoarea

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Rezultă că ecuația planului căutat este

$$1 \cdot (x - 3) + 2(y - 2) + 3(z - 1) = 0 \Rightarrow x + 2y + 3z - 10 = 0$$

84. Să se afle ecuația planului determinat de dreptele

$$(D_1)\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}, \qquad (D_2)\ \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

R. Dreptele D_1, D_2 sînt concurente deoarece fiecare trece prin punctul $P_0(1, 2, 3)$. Pentru a scrie ecuația planului căutat, luăm pe dreapta D_1 punctul $P_1(0, 0, 0)$, iar pe D_2 punctul $P_2(-8, -4, 0)$ și egalăm cu zero următorul determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dezvoltînd, se obține ecuația planului căutat, și anume

$$x - 2y + z = 0.$$

85. Să se scrie ecuația planului determinat de dreptele

$$(D_1)\ \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3}, \qquad (D_2)\ \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{3}$$

R. Dreptele date sînt paralele, deoarece ele au același vector director $\vec{v} = (1, 2, 3)$. Pentru a scrie ecuația planului astfel determinat, luăm pe dreapta D_1 punctul $P_1(0, 0, 0)$, iar pe D_2 punctele $P_2(-3, -2, -1)$, $P_2'(-2, 0, 2)$ și anulăm determinantul

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dezvoltînd, se obține ecuația planului căutat și anume

$$x - 2y + z = 0.$$

86. Să se scrie ecuația planului determinat de punctul $P_1(1, -2, 3)$ și de dreapta $(D)\ \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$

Scanned with OKEN Scanner

R. Pentru a scrie ecuația planului căutat luăm pe dreapta (D) punctele $P_2(-1, 2, -3)$, $P_3(8, 8, 0)$ și egalăm cu zero determinantul următor

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 8 & 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dezvoltînd, se obține ecuația cerută, și anume

$$x - y - z = 0$$

87. Să se afle distanța de la punctul $A(3, -2, 1)$ la planul (P) $x - 2y + 2z - 12 = 0$

R. Ecuația normalizată a planului P este următoarea

$$\frac{x - 2y + 2z - 12}{+\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x - 2y + 2z - 12}{+3} = 0$$

Notînd cu d distanța căutată, avem succesiv

$$d = \frac{|3 - 2(-2) + 2 \cdot 1 - 12|}{3} = \frac{|-3|}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

88. Să se afle unghiul format de planele

$$(P_1)\ x + 2y + 3z + 4 = 0, \quad (P_2)\ 4x + 3y + 2z + 1 = 0.$$

R. Notînd cu φ acest unghi și cu $\vec{N}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{N}_2 = (4, 3, 2)$ normalele la planele P_1, P_2 respectiv, avem succesiv

$$\cos \varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{N_1 \cdot N_2} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{16}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{29}} = \frac{16}{\sqrt{406}}.$$

de unde rezultă că avem

$$\varphi = \operatorname{Arccos} \frac{16}{\sqrt{406}}.$$

89. Să se determine parametrul real λ astfel ca planele

$$(P_1)\ \lambda x + y + 2z + 3 = 0, \quad (P_2)\ x + \lambda y + (\lambda + 1)z + \lambda + 2 = 0$$

să fie perpendiculare.

R. Notăm cu $\vec{N}_1 = (\lambda, 1, 2)$, $\vec{N}_2 = (1, \lambda, \lambda + 1)$ normalele la planele P_1, P_2 respectiv. Planele date fiind perpendiculare, rezultă că vectorii $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ sînt ortogonali. Avem deci succesiv

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \Rightarrow \lambda \cdot 1 + 1 \cdot \lambda + 2(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow 4\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}.$$

90. Să se determine parametrii reali λ, μ astfel ca planele

$$(P_1)\ (\lambda+2)x + 3y + z + 2\mu - 1 = 0, \quad (P_2)\ 6\lambda x + (4 - \mu)y - \mu z + \lambda + 2 = 0$$

să fie paralele.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm cu $\vec{N}_1 = (\lambda + 2,\ 3,\ 1)$, $\vec{N}_2 = (6\lambda,\ 4 - \mu,\ -\mu)$ normal la planele P_1, P_2 respectiv. Planele date fiind paralele, rezultă că vectorii $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ sînt coliniari. Avem deci succesiv

$$\vec{N}_2 = \rho\vec{N}_1 \Rightarrow \frac{6}{\lambda + 2} = \frac{4 - \mu}{3} = \frac{-\mu}{1} = \rho, \quad (\rho \neq 0),$$

de unde rezultă sistemul

$$\begin{cases} 6\lambda = -\mu(\lambda + 2) \\ 4 - \mu = -3\mu \end{cases}$$

a cărei soluție este $\lambda = 1$, $\mu = -2$.

91. Să se scrie ecuațiile dreptei D ce trece prin punctul $A(1,\ 2,\ 3)$ și are vectorul director $\vec{v} = (,3\ 2,\ 1)$.

R. Considerăm pe dreapta respectivă punctul curent $P(x,\ y,\ z)$. Vectorul $\overrightarrow{AP} = (x-1,\ y-2,\ z-3)$ fiind coliniar cu vectorul $\vec{v}$, avem

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1} = \lambda$$

unde λ este un parametru. Ecuațiile

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

constituie ecuațiile canonice ale dreptei D, iar ecuațiile

$$\begin{cases} x = 3\lambda + 1 \\ y = 2\lambda + 2 \\ z = \lambda + 3 \end{cases} \quad (\lambda \in R)$$

obținute exprimînd pe x, y, z în funcție de parametrul λ constituie ecuațiile parametrice ale dreptei D. Dacă exprimăm acum pe x și y în funcție de z obținem ecuațiile

$$\begin{cases} x = 3z - 8 \\ y = 2z - 4 \end{cases} \quad (z \in R)$$

numite ecuațiile explicite ale dreptei D.

92. Să se scrie ecuațiile canonice ale dreptei D ce trece prin punctele $P_1(3,\ 2,\ 1)$, $P_2(4,\ 5,\ 6)$.

R. Considerînd pe dreapta D punctul curent $P(x,\ y,\ z)$, vectorii $\overrightarrow{P_1P} = (x-3, y-2, z-1)$, $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,\ 3,\ 5)$ trebuie să fie coliniari, deci avem $\overrightarrow{P_1P} = \lambda\overrightarrow{P_1P_2}$, de unde rezultă ecuațiile canonice ale dreptei D

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{5}.$$

Scanned with OKEN Scanner

93. Să se scrie ecuațiile canonice ale dreptei

$$(D)\ \begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

căutînd două puncte ale dreptei D.

R. Dînd uneia dintre necunoscutele x, y, z, de ex. a lui x, o valoare oarecare și rezolvînd sistemul (D) format cu celelalte necunoscute, determinăm coordonatele unui punct al dreptei D.

Astfel, dacă dăm lui x valoarea 1, obținem sistemul

$$\begin{cases} 2y - 3z = 0 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

care are soluția $y = -3$, $z = -2$. Rezultă că punctul $P_1(1, -3, -2)$ aparține dreptei D. Dînd apoi lui y valoarea 3, obținem sistemul

$$\begin{cases} x + 3z = 7 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

care are soluția $x = \frac{7}{4}$, $z = \frac{7}{4}$, deci punctul $P_2\left(\frac{7}{4}, 3, \frac{7}{4}\right)$ aparține dreptei D.

Ecuațiile canonice ale dreptei D sînt

$$\frac{x-1}{\frac{7}{4}-1} = \frac{y+3}{3+3} = \frac{z+2}{\frac{7}{4}+2} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{8} = \frac{z+2}{5}$$

94. Să se afle unghiul format de dreptele

$$(D_1)\ \frac{x+2}{1} = \frac{2y+3}{2} = \frac{3z+4}{3}, \qquad (D_2)\ \frac{2x+1}{3} = \frac{3y+2}{-3} = \frac{4z+3}{1}$$

R. Notînd cu $\vec{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{v}_2 = (3, -3, 1)$ vectorii directori ai dreptelor D_1, D_2 respectiv și cu φ unghiul acestor drepte, avem succesiv

$$\cos\varphi = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{v_1 \cdot v_2} = \frac{1 \cdot 3 + 2(-3) + 3 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2}} = 0$$

de unde rezultă că $\varphi = \frac{\pi}{2}$, deci dreptele sînt perpendiculare.

95. Să se afle unghiul φ format de dreapta D cu planul P, unde

$$(D)\ \frac{4x+3}{2} = \frac{3y+2}{1} = \frac{2z+1}{3}, \qquad (P)\ x - 5y + z + 4 = 0.$$

R. Se numește unghiul unei drepte cu un plan, unghiul φ $(0 \leqslant \varphi < \pi)$ format de această dreaptă cu proiecția ei pe plan.

Notăm cu $\vec{v} = (2, 1, 3)$ vectorul director al dreptei D și cu $\vec{N} = (1, -5, 1)$ vectorul normal la planul P. Dacă φ este unghiul format de dreapta D cu

Scanned with OKEN Scanner

planul P, atunci $\frac{\pi}{2} - \varphi$ este unghiul format de vectorii $\vec{v}$ și $\vec{N}$. Avem deci

$$\sin \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{N}}{v \cdot N} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) + 3 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2 + 1^2}} = 0$$

de unde rezultă $\varphi = 0$, deci dreapta D este paralelă cu planul P.

96. Să se afle ecuația planului determinat de punctul $A(3, -1, 2)$ și dreapta

$$(D) \begin{cases} 2x - y - 3z - 2 = 0 \\ x + 3y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

R. Oricare ar fi parametrul real λ, dreapta D este conținută în planul (P_1) $2x - y - 3z - 2 + \lambda(x+3y-z+4) = 0$ (fascicul de plane de axă D), deoarece ar fi punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ aparținînd dreptei D, avem

$$2x_0 - y_0 - 3z_0 - 2 = 0, \qquad x_0 + 3y_0 - z_0 + 4 = 0$$

de unde rezultă că avem pentru orice λ

$$2x_0 - y_0 - 3z_0 - 2 + \lambda(x_0 + 3y_0 - z_0 + 4) = 0$$

adică punctul M_0 se află în planul P, oricare ar fi λ real.

Punem acum condiția ca planul din fascicul să treacă prin A și avem

$$6 + 1 - 6 - 2 + \lambda(3 - 3 - 2 + 4) = 0 \Rightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Înlocuind $\lambda = \frac{1}{2}$ în ecuația fascicolului, obținem

$$5x + y - 7z = 0$$

care este ecuația planului căutat.

97. Să se scrie ecuația planului care trece prin dreapta

$$(D) \begin{cases} 2x + 3y + z - 2 = 0 \\ x + 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

și este perpendicular pe planul

$$(P) \quad 3x - y + 2z + 2 = 0.$$

R. Planul căutat face parte din fasciculul de plane

$$2x + 3y + z - 2 + \lambda(x + 2y - 3z + 1) = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)\, x + (2\lambda + 3)\, y + (1 - 3\lambda)\, z + \lambda - 2 = 0$$

Punînd condiția ca acest plan să fie perpendicular pe planul P, avem

$$3(\lambda + 2) - (2\lambda + 3) + 2(1 - 3\lambda) = 0 \Rightarrow -5\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Ecuația planului căutat este deci

$$3x + 5y - 2z - 1 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

98. Să se scrie ecuațiile proiecției dreptei D pe planul P, unde

$$(D)\ \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ 2x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$(P)\ \ 3x + 2y - z - 2 = 0$$

R. Planul proiectant pe planul P, dus prin dreapta D face parte din fasciculul de plane de axă D, și anume

$$x + y + z + 3 + \lambda(2x - 3y - z - 2) = 0 \Rightarrow (2\lambda + 1)\, x + (1 - 3\lambda)\, y + (1 - \lambda)\, z + 3 - 2\lambda = 0$$

Scriind că acest plan este perpendicular pe planul P, obținem

$$3(2\lambda + 1) + 2(1 - 3\lambda) - 2(1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}.$$

Planul proiectant pe planul P, dus prin dreapta D, are deci ecuația

$$4x - 11y - 5z - 12 = 0$$

astfel că ecuațiile proiecției dreptei D pe planul P sînt

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ 4x - 11y - 5z - 12 = 0 \end{cases}$$

99. Să se afle coordonatele simetricului punctului $A(-1, 2, 2)$ față de planul

$$(P)\ 2x + y + 3z = 0$$

R. Notăm cu $A'(x_0, y_0, z_0)$ simetricul căutat. Atunci punctul B de intersecție a dreptei AA' cu planul P are coordonatele $B\left(\frac{x_0 - 1}{2}, \frac{y_0 - 1}{2}, \frac{z_0 + 2}{2}\right)$.

Punctul B fiind în planul P, trebuie să avem

$$x_0 - 1 + \frac{y_0 + 2}{2} + 3 \cdot \frac{z_0 + 2}{2} - 2 = 0 \Rightarrow 2x_0 + y_0 + 3z_0 + 2 = 0$$

Dreapta AA' fiind perpendiculară pe planul P, înseamnă că vectorul $\overrightarrow{AA'} = (x_0 + 1, y_0 - 2, z_0 - 2)$ este coliniar cu vectorul $\vec{N} = (2, 1, 3)$ normal la planul P. Trebuie deci să avem relațiile

$$\frac{x_0 + 1}{2} = \frac{y_0 - 2}{1} = \frac{z_0 - 2}{3}$$

Rezolvînd sistemul liniar neomogen

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 + 3z_0 + 2 = 0 \\ \frac{x_0 + 1}{2} = \frac{y_0 - 2}{1} = \frac{z_0 - 2}{3} \end{cases}$$

se găsește $x_0 = -\frac{15}{7}$, $y_0 = \frac{10}{7}$, $z_0 = \frac{2}{7}$, deci avem $A'\left(-\frac{15}{7}, \frac{10}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

100. Să se afle coordonatele simetricului punctului $A(1, 2, 3)$ față de punctul $B(3, 2, 1)$.

R. Notînd cu $A'(x_0, y_0, z_0)$ simetricul căutat, trebuie să avem

$$\frac{x_0+1}{2}=3,\quad \frac{y_0+2}{2}=2,\quad \frac{z_0+3}{2}=1,$$

de unde rezultă $x_0=5,\quad y_0=2,\quad z_0=-1$, deci obținem $A'(5, 2, -1)$.

101. Să se afle coordonatele simetricului punctului $A(2, -1, -1)$ față de dreapta $(D)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{1}$.

R. Fie $A'(x_0, y_0, z_0)$ simetricul căutat și $B\left(\frac{x_0+2}{2}, \frac{y_0-1}{2}, \frac{z_0-1}{2}\right)$ punctul de intersecție al dreptei D cu planul P ce trece prin A și este perpendicular pe dreapta D.

Planul P are ecuația

$$(P)\ 2(x-2)+3(y+1)+z+1=0 \Rightarrow (P)\qquad 2x+3y+z=0$$

deoarece vectorul $\vec{v}=(2, 3, 1)$ director al dreptei D este normal la planul P.

Dacă rezolvăm acum sistemul liniar neomogen

$$\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1} \end{cases}$$

obținem $x_B=\frac{8}{7},\quad y_B=-\frac{11}{14},\quad z_B=\frac{1}{14}$, unde x_B, y_B, z_B reprezintă coordonatele punctului B. Rezultă că trebuie să avem

$$\frac{x_0+2}{2}=\frac{8}{7},\quad \frac{y_0-1}{2}=-\frac{11}{14},\quad \frac{z_0-1}{2}=\frac{1}{14}$$

de unde obținem $x_0=\frac{2}{7},\quad y_0=-\frac{4}{7},\quad z_0=\frac{8}{7}$, deci avem $A'\left(\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{8}{7}\right)$.

102. Să se afle ecuațiile simetricei dreptei D față de planul P, unde

$$(D)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1},\quad (P)\ x+2y+z+3=0.$$

R. Considerăm pe dreapta D punctele $A(1, -1, 0)$, $B(3, 2, 1)$. Efectuînd calculele se găsește că simetricele A', B' respectiv ale punctelor A, B față de planul P au coordonatele:

$$A'\left(\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right),\quad B'\left(-\frac{2}{3}, -\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}\right).$$

Simetrica dreptei D față de planul P este dreapta $A'B'$, ale cărei ecuații sînt

$$(A'B')\ \frac{3x-1}{1}=\frac{3y+7}{3}=\frac{3z+2}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

103. Să se afle locul geometric al simetricelor punctelor planului P față de planul Q, unde

$$(P) \quad x + 2y = 0, \quad (Q) \quad 2x + z = 0$$

R. Fie $A(\lambda, \mu, \nu)$ un punct oarecare în planul P, deci avem $\lambda + 2\mu = 0$. Notăm cu $A'(x, y, z)$ simetricul lui A față de planul Q și cu $M\left(\frac{x+\lambda}{2}, \frac{y+\mu}{2}, \frac{z+\nu}{2}\right)$ proiecția lui A pe planul Q, deci avem relația

$$2(x + \lambda) + z + \nu = 0.$$

Dreapta AA' fiind perpendiculară pe planul Q, avem relațiile $\frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-\mu}{0} = \frac{z-\nu}{1}$.

Ecuația locului geometric căutat se obține eliminînd cei trei parametri λ, μ, ν între următoarele patru relații

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ 2\lambda + \nu = -(2x + z) \\ \mu = y \\ \lambda - 2\nu = x - 2z \end{cases}$$

Ca rezultat se obține relația următoare între x, y, z

$$3x - 10y + 4z = 0$$

care este ecuația unui plan. Locul geometric este deci un plan.

104. Să se calculeze distanța de la punctul $A(3, -2, 1)$ la dreapta

$$(D) \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{3}$$

R. Distanța de la punctul A la dreapta D este distanța dintre punctul A și B, unde B este proiecția lui A pe D și se obține intersectînd dreapta D cu planul P ce trece prin A și este perpendicular pe dreapta D.

Ecuația planului P este așadar

$$(P) \quad x - 3 - 2(y + 2) + 3(z - 1) = 0 \Rightarrow (P) \quad x - 2y + 3z - 10 = 0$$

Rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 10 = 0 \\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{3} \end{cases}$$

obținem $x = \frac{5}{7}, \quad y = -\frac{10}{7}, \quad z = \frac{15}{7}$, deci avem $B\left(\frac{5}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{15}{7}\right)$.

Notînd cu d distanța căutată, obținem

$$d = \sqrt{\left(\frac{5}{7} - 3\right)^2 + \left(-\frac{10}{7} + 2\right)^2 + \left(\frac{15}{7} - 1\right)^2} = \frac{4}{7}\sqrt{21}.$$

Scanned with OKEN Scanner

105. Să se afle distanța dintre dreptele paralele

$$(D_1)\ \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{3}, \qquad (D_2)\ \frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{3}$$

R. Fie $P_1(0, 0, 0)$ un punct pe dreapta D_1. Dacă P_2 este proiecția lui P_1 pe dreapta D_2, atunci distanța dintre dreptele date este egală cu distanța dintre punctele P_1, P_2. Punctul P_2 se află la intersecția dreptei D_2 cu planul P ce trece prin P_1 și este perpendicular pe D_2. Avem

$$(P)\quad x+2y+3z=0$$

Rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{3} \end{cases}$$

obținem $x=-\frac{16}{7}$, $y=-\frac{4}{7}$, $z=\frac{8}{7}$, deci avem $P_2\left(-\frac{16}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{8}{7}\right)$.

Notînd cu d distanța căutată, rezultă

$$d=\sqrt{\frac{256}{49}+\frac{16}{49}+\frac{64}{49}}=\frac{4}{7}\sqrt{21}.$$

106. Să se afle distanța dintre planele paralele

$$(P_1)\quad x+2y+3z+4=0, \quad (P_2)\quad 2x+4y+6z+7=0.$$

R. Fie $A_1(-4, 0, 0)$ un punct în planul P_1. Dacă A_2 este proiecția lui A_1 pe planul P_2, atunci distanța dintre planele date este egală cu distanța dintre punctele A_1, A_2. Punctul A_2 se află la intersecția planului P_2 cu dreapta D ce trece prin A_1 și este perpendiculară pe planul P_2. Avem

$$(D)\ \frac{x+4}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}$$

Rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} 2x+4y+6z+7=0 \\ \dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3} \end{cases}$$

obținem $x=-\frac{111}{28}$, $y=\frac{1}{14}$, $z=\frac{3}{28}$, deci avem $A_2\left(-\frac{111}{28}, \frac{1}{14}, \frac{3}{28}\right)$

Notînd cu d distanța căutată, rezultă

$$d=\sqrt{\left(-\frac{111}{28}+4\right)^2+\left(\frac{1}{14}\right)^2+\left(\frac{3}{28}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{28}$$

107. Să se afle distanța dintre dreapta D și planul P, unde

$$(D)\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}, \qquad (P)\quad 5x-y-z-27=0$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Dreapta D este paralelă cu planul P, deoarece vectorul director $\vec{v} = (1, 2, 3)$ al dreptei D este perpendicular pe normala $\vec{N} = (5, -1, -1)$, la planul P.

Fie $0(0, 0, 0)$ un punct al dreptei D și A proiecția lui 0 pe planul P. Atunci distanța d dintre dreapta D și planul P este egală cu distanța dintre punctele O, A.

Punctul A se află la intersecția planului P cu perpendiculara Δ dusă din O pe planul P. Avem

$$(\Delta)\ \frac{x}{5} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}, \qquad (P)\quad 5x - y - z - 27 = 0$$

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile ce apar în (Δ) și (P), obținem soluția $x = 5$, $y = -1$, $z = -1$, deci $A(5, -1, -1)$. Rezultă că avem

$$d = \sqrt{25+1+1} = 3\sqrt{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

ŞIRURI DE NUMERE. SERII DE NUMERE

108. Să se arate că şirurile următoare, date prin termenul general

a) $a_n = \frac{\sqrt{3n^2+2n+2}}{n}$, $b_n = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n+2}$, $c_n = \frac{\alpha n+\beta}{n+1}$

sînt strict monotone.

R. a) Studiem semnul diferenţei

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\sqrt{3(n+1)^2+2(n+1)+2}}{n+1} - \frac{\sqrt{3n^2+2n+2}}{n}.$$

Semnul acestei diferenţe este acelaşi cu semnul diferenţei

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \frac{3n^2+8n+7}{(n+1)^2} - \frac{3n^2+2n+2}{n^2} = -2\frac{n^2+n+1}{n^2(n+1)^2} < 0.$$

Rezultă $a_{n+1} < a_n$, deci şirul este strict descrescător.

b) Avem $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, rezultă

$b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+3)}$.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6(n+3)} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+2)} = \frac{(n+1)(4n^2+17n+12)}{6(n+2)(n+3)},$$

de unde $b_{n+1} - b_n > 0$, $b_{n+1} > b_n$, deci şirul este strict crescător.

c) Avem $c_{n+1} - c_n = \frac{\alpha(n+1)+\beta}{n+2} - \frac{\alpha n+\beta}{n+1} = \frac{\alpha-\beta}{(n+1)(n+2)}$.

Se consideră cazurile

$\alpha > \beta$, $c_{n+1} - c_n > 0$, deci şirul este strict crescător,

$\alpha < \beta$, $c_{n+1} - c_n < 0$, deci şirul este strict descrescător

$\alpha = \beta$ $c_n = \alpha$, şirul este constant.

109. Folosind definiția convergenței unui șir, să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n+2} = \frac{2}{5}$.

R. Trebuie să arătăm că pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$\left|\frac{2n+1}{5n+2} - \frac{2}{5}\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

Într-adevăr, membrul stîng al inegalității (1) se mai scrie $\left|\frac{2n+1}{5n+2} - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{5(5n+2)}$, și inegalitatea (1) devine $\frac{1}{5(5n+2)} < \varepsilon$, de unde $n > \frac{1}{25\varepsilon} - \frac{2}{5}$.

Luînd $N(\varepsilon) = E\left(\frac{1}{25\varepsilon} - \frac{2}{5}\right)$ rezultă că pentru $n > N(\varepsilon)$ avem $\left|\frac{2n+1}{5n+2} - \frac{2}{5}\right| < \varepsilon$.

Observație. Dacă x este un număr real, $E(x)$ este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x. Din această definiție rezultă că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem $x - 1 < E(x) \leqslant x$.

110. Să se arate că șirul cu termenul general $a_n = \frac{n^2}{3n^2+1}$ are limita $\frac{1}{3}$. Să se determine rangurile de la care începînd, toți termenii șirului (a_n) diferă de $\frac{1}{3}$ cu mai puțin de $\frac{1}{10^2}$ sau $\frac{1}{10^3}$.

R. Fie un număr arbitrar $\varepsilon > 0$. Condiția $\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ devine $\left|\frac{n^2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ sau $\left|\frac{-1}{3(3n^2+1)}\right| < \varepsilon$.

Ultima inegalitate este satisfăcută pentru $n > \sqrt{\frac{1}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}}$.

Luînd $N(\varepsilon) = E\left(\sqrt{\frac{1}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}}\right)$, rezultă că pentru orice număr $\varepsilon > 0$, $\left(\varepsilon < \frac{1}{3}\right)$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît $\left|\frac{n^2}{3n^2+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$, pentru orice $n > N(\varepsilon)$.

Dacă $\varepsilon = \frac{1}{10^2}$ rezultă $N(\varepsilon) = E\left(\sqrt{\frac{100}{9} - \frac{1}{3}}\right) = 3$.

Deci termenii $a_4, a_5, \ldots, \ldots$ diferă de limita $\frac{1}{3}$ cu mai puțin de $\frac{1}{10^2}$.

Dacă $\varepsilon = \frac{1}{10^3}$, rezultă $N(\varepsilon) = E\sqrt{\frac{1\,000}{9} - \frac{1}{3}}\Big) = 10$.

Rezultă că termenii $a_{11}, a_{12}, \ldots$ diferă de $\frac{1}{3}$ cu mai puțin de $\frac{1}{10^3}$.

111. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n + (-3)^n}{4^n} = 0$.

R. Fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar. Avem

$$\left|\frac{3^n + (-3)^n}{4^n}\right| \leqslant \frac{3^n + 3^n}{4^n} = \frac{2 \cdot 3^n}{4^n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\frac{2\cdot 3^n}{4^n}<\varepsilon$, atunci $n\log\frac{3}{4}<\log\frac{\varepsilon}{2}$, de unde $n>\frac{\log\frac{\varepsilon}{2}}{\log\frac{3}{4}}$.

Luînd $N(\varepsilon)=E\left(\frac{\log\frac{\varepsilon}{2}}{\log\frac{3}{4}}\right)$ rezultă că pentru $\varepsilon>0$, există $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $n>N(\varepsilon)$ să avem $\frac{2\cdot 3^n}{4^n}>\varepsilon$, deci cu atît mai mult $\left|\frac{3^n+(-3)^n}{4^n}\right|<\varepsilon$.

112. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

R. Avem $\frac{n}{2^n}=\frac{n}{(1+1)^n}=\frac{n}{1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n}<\frac{n}{C_n^2}=\frac{2}{n-1}$.

Fie $\varepsilon>0$ un număr arbitrar. Avem $\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}<\varepsilon$ pentru orice $n>E\left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)$.

113. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, $a>0$.

R. Cazul 1) $a>1$, atunci $\sqrt[n]{a}>1$. Pentru orice număr $\varepsilon>0$, avem $a<1+n\varepsilon$, dacă $n>E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right)$. Ţinînd seama de inegalitatea $(1+\varepsilon)^n\geqslant 1+n\varepsilon$ rezultă că $a<(1+\varepsilon)^n$, mai putem scrie că

$$1-\varepsilon<1<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon, \text{ pentru orice } n>E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right)=N(\varepsilon).$$

Inegalităţile anterioare se mai scriu

$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$, pentru orice $n>N(\varepsilon)$, ceea ce este echivalent cu $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Cazul 2) $a<1$. Dacă $a<1$, atunci $a'=\frac{1}{a}>1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a'}=1$, adică pentru orice număr $\varepsilon>0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n>N(\varepsilon)$ să avem $|\sqrt[n]{a'}-1|<\varepsilon$.

Dar din $|\sqrt[n]{a}-1|=\left|\frac{1}{\sqrt[n]{a'}}-1\right|=\left|\frac{\sqrt[n]{a'}-1}{\sqrt[n]{a'}}\right|<|\sqrt[n]{a'}-1|$, rezultă că $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$, pentru orice $n>N(\varepsilon)$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Dacă $a=1$, atunci $\sqrt[n]{a}=1$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

114. Să se calculeze limita şirului (x_n) de termen general

$$x_n=\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+\ldots+a_{p-1}n+a_p}{b_0n^s+b_1n^{s-1}+\ldots+b_{s-1}n+b_s}, \text{ cu } a_0\neq 0,\ b_0\neq 0,$$

$p,\ s>0,\ b_0n^s+b_1n^{s-1}+\ldots+b_{s-1}n+b_s\neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

R. Cazul 1). $p = s$. Putem scrie

$$x_n = \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{b_p}{n_p}}$$

și deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_k}{n^k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_l}{n^l} = 0$, $l = 1, 2, \ldots, p$, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{a_0}{b_0}$.

Cazul 2. $p > s$. Putem scrie

$$x_n = \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_s}{n^s}} n^{p-s}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-s} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_s}{n^s}} = \frac{a_0}{b_0}$

rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \cdot \operatorname{sign} \frac{a_0}{b_0}$.

Observație. Dacă x este un număr real atunci sign x este definit de

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Cazul 3. $p < s$. Putem scrie

$$x_n = \frac{1}{n^{s-p}} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_s}{n^s}} \cdot \text{ Dar } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{s-p}} = 0,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_n}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_s}{n^s}} = \frac{a_0}{b_0}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

115. Să se calculeze limita șirului de termen general

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}.$$

R. Avem următoarele inegalități

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Însumînd aceste inegalităţi în raport cu k avem

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}},\ \text{sau}\ \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}<a_n<\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}=1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

116. Să se calculeze limita şirului de termen general

$$a_n=\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)},\quad x>0.$$

R. Distingem cazurile:

1). $0<x<1$. Dacă $x>0$ atunci $1+x^p>1$, $p=1,2,\ldots$, deci

$$0<\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}<x^n \text{ şi cum } \lim_{n\to\infty}x^n=0,$$

dacă $0<x<1$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

2). $x=1$, atunci $a_n=\frac{1}{2^n}$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

3). $x>1$, atunci $1+x^p>x^p$, $p=1,2,\ldots$, de unde

$$0<\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}<\frac{x^n}{x\cdot x^2\ldots x^n}=\frac{x^n}{x^{1+2+\ldots+n}}=$$

$$=\frac{1}{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$ şi, deoarece $0<\frac{1}{x}<1$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

117. Să se arate că dacă şirul (a_n) este mărginit, iar şirul (b_n) este convergent către zero, atunci şirul (a_nb_n) este convergent la zero.

R. Şirul (a_n) fiind mărginit, există un număr $M>0$, aşa încît $|a_n|\leqslant M$ pentru orice $n\in N$.

Şirul (b_n) fiind convergent la zero, pentru orice număr $\varepsilon>0$, există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n>N(\varepsilon)$ să avem $|b_n|<\frac{\varepsilon}{M}$.

Dar $|a_nb_n|=|a_n|\cdot|b_n|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$

Deci $|a_nb_n|<\varepsilon$ pentru $n>N(\varepsilon)$, ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

118. Să se studieze şirul de termen general

$$x_n=\frac{n\sin x^n}{\sqrt[3]{an^4+2}+\sqrt{bn^3+1}},\quad x>1,\ a,b>0.$$

R. Deoarece $|\sin x^n|\leqslant 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{an^4+1}+\sqrt{bn^3+1}}=0$

rezultă (exerciţiul 117) că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin x^n}{\sqrt[3]{an^4+1}+\sqrt{bn^3+1}}=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

119. Să se calculeze limita șirului de termen general

$$a_n = \frac{5\cdot 1+6}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} + \frac{5\cdot 2+6}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{5n+6}{2n(n+1)(n+2)}.$$

R. Avem $\frac{5k+6}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{3}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+2}$.

Dăm lui k valori de la 1 la n și avem

$$k=1,\ \frac{5\cdot 1+6}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = \frac{3}{2\cdot 1} - \frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{3}$$

$$k=2,\ \frac{5\cdot 2+6}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{3}{2\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{4}$$

$$k=3,\ \frac{5\cdot 3+6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{3}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1}{5}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k=n-2,\ \frac{5(n-2)+6}{2(n-2)(n-1)n} = \frac{3}{2(n-2)} - \frac{1}{(2n-2)} - \frac{1}{n}$$

$$k=n-1,\ \frac{5(n-1)+6}{2(n-1)n(n+1)} = \frac{3}{2(n-1)} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1}$$

$$k=n,\ \frac{5n+6}{2n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+2}.$$

Însumînd egalitățile de mai sus membru cu membru, rezultă

$$a_n = 2 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+2}, \text{ de unde } \lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

120. Să se arate că dacă $|x|<1$, atunci $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$.

R. Dacă $|x|<1$, atunci există un număr $\alpha>0$, astfel ca

$$|x| = \frac{1}{1+\alpha},\ \text{sau}\ |x^n| = \frac{1}{(1+\alpha)^n} = \frac{1}{1^n + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n} < \frac{2}{n(n-1)\alpha^2}.$$

Deci $n|x^n| < \frac{2}{(n-1)\alpha^2}$.

Fie $\varepsilon>0$, arbitrar. Vom avea $\frac{2}{(n-1)\alpha^2} < \varepsilon$ dacă $n > 1 + \frac{2}{\alpha^2\varepsilon}$.

Există deci un rang $N(\varepsilon) = E\left(1+\frac{2}{\alpha^2\varepsilon}\right)$ astfel ca pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem $n|x^n| < \varepsilon$. Deci $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$.

121. Să se studieze convergența șirului de termen general

$$a_n = \frac{n^2}{n^3+n+1}\cos n! + \frac{a^{8n}}{(1+a^n)(1+3a^{2n})(1+a^{5n})},\ a>0$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Deoarece $|\cos n!| \leqslant 1$, iar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+n+1} = 0, \text{ rezultă } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+n+1} \cos n! = 0.$$

Să calculăm $\lim_{n\to\infty} b_n$, unde $b_n = \dfrac{a^{8n}}{(1+a^n)(1+a^{4n})(1+a^{5n})}$.

Dacă $a < 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Dacă $a = 1$, atunci $b_n = \frac{1}{8}$ și deci $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{8}$.

Dacă $a > 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

Deci $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a < 1; \\ \frac{1}{8}, & \text{dacă } a = 1; \\ 1, & \text{dacă } a > 1. \end{cases}$

122. Să se calculeze limita șirului de termen general

$$a_n = \frac{E(x) + E(3^2x) + \ldots + E[(2n-1)^2 x]}{2n^3+1}$$

unde $E(x)$ este partea întreagă a numărului x.

R. Plecăm de la inegalitățile

$$y - 1 < E(y) \leqslant y, \text{ oricare ar fi } y \in \mathbf{R}.$$

Vom avea deci

$$x - 1 < E(x) \leqslant x$$

$$3^2x - 1 < E(3^2x) \leqslant 3^2x$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(2n-1)^2 x - 1 < E[(2n-1)^2 x] \leqslant (2n-1)^2 x$$

Adunînd membru cu membru aceste inegalități, rezultă

$$[1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2]\, x - n < E(x) + E(3^2x) + \ldots + E[(2n-1)^2 x] \leqslant [1^2 + 3^2 + (2n-1)^2]\, x.$$

Dar $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Vom avea deci

$$\frac{n(2n-1)(2n+1)\,x - n}{3(2n^3+1)} < \frac{E(x) + E(3^2x) + \ldots + E[(2n-1)^2 x]}{2n^3+1} \leqslant \frac{n(2n-1)(2n+1)\,x}{3(2n^3+1)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Însă $\lim_{n\to\infty} \frac{n(2n-1)(2n+1)x-n}{3(2n^3+1)} = \frac{2x}{3}$ și $\lim_{n\to\infty} \frac{n(2n-1)(2n+1)x}{3(2n^3+1)} = \frac{2x}{3}$.

Rezultă deci $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2x}{3}$.

123. Fie (x_n) un șir strict crescător, divergent și (y_n) un șir oarecare. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = l$, (α), atunci există și $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}$ și $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = l$ (O. Stolz — Cezaro).

R. Cazul 1. Presupunem l finit și $x_n \to \infty$. Fie $U = (a, b)$, o vecinătate a lui l. Deci $a < l < b$. Să considerăm $U' = (a', b')$, astfel ca $a < a' < l < b' < b$. Din (α) rezultă că există un număr N astfel încît să avem

$$a' < \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} < b', \text{ pentru orice } n > N,$$

sau

$$a'(x_{n+1}-x_n) < y_{n+1}-y_n < b'(x_{n+1}-x_n).$$

Scriem aceste inegalități pentru N, $N+1$, ... , $n-1$

$$a'(x_{N+1}-x_N) < y_{N+1}-y_N < b'(x_{N+1}-x_n)$$
$$a'(x_{N+2}-x_{N+1}) < y_{N+2}-y_{N+1} < b'(x_{N+2}-x_{N+1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a'(x_n-x_{n-1}) < y_n-y_{n-1} < b'(x_n-x_{n-1}).$$

Adunînd inegalitățile scrise și împărțind cu x_n (pe care-l putem considera pozitiv), avem

$$a'\left(1-\frac{x_N}{x_n}\right) < \frac{y_n}{x_n} - \frac{y_N}{x_n} < b'\left(1-\frac{x_N}{x_n}\right),$$

sau

$$a' + \left(\frac{y_N}{x_n} - \frac{a'x_N}{x_n}\right) < \frac{y_n}{x_n} < b' + \left(\frac{y_N}{x_n} - \frac{b'x_N}{x_n}\right).$$

Dar $x_n \to \infty$ și deci $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_N}{x_n} - \frac{a'x_N}{x_n}\right) = 0$ și $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_N}{x_n} - \frac{b'x_N}{x_n}\right) = 0$. Rezultă că există N', astfel încît $a < a' + \left(\frac{y_N}{x_n} - \frac{a'x_N}{x_n}\right)$, $b' + \left(\frac{y_N}{x_n} - \frac{b'x_N}{x_n}\right) < b$ pentru orice $n > N'$.

Așadar, oricare ar fi $n > N'$, avem $a < \frac{y_n}{x_n} < b$, ceea ce este echivalent cu $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = l$.

Cazul 2. $l = +\infty$. Considerăm $U = (a, +\infty)$ o vecinătate a lui $+\infty$ și luăm $U' = (a', +\infty)$ cu $a' > a$. Raționînd ca în cazul 1), obținem $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = l$.

Scanned with OKEN Scanner

Cazul 3. $l = -\infty$. Alegem o vecinătate a lui $-\infty$ de forma $U = (-\infty, b)$ și luăm apoi $U' = (-\infty, b')$ cu $b' < b$. Rezultă și acest caz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = l$.

124. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, atunci avem și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

R. Aplicăm lema Stolz-Cezaro, luînd

$$y_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad x_n = n.$$

Obținem,

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = a_{n+1}.$$

Dar $a_{n+1} \to a$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a$.

125. Fie (b_n) un șir de numere strict pozitive, convergent către b, atunci și șirul $b_1, \sqrt{b_1 b_2} \ldots \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \ldots$ este convergent către b.

R. Putem scrie

$$\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} = e^{\ln \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}} = e^{\frac{\ln b_1 + \ln b_2 + \ldots + \ln b_n}{n}}.$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} \ln b_n = \ln b$, deci vom avea și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln b_1 + \ln b_2 + \ldots + \ln b_n}{n} = \ln b \text{ (ex. 124)}.$$

Așadar, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} = e^{\ln b} = b$.

126. Dacă $a_n > 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, atunci și $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

R. Avem $a_n = \frac{a_1}{1} \cdot \frac{a_2}{a_1} \ldots \frac{a_n}{a_{n-1}}$, și aplicînd rezultatul de la exercițiul 125 rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

127. Să se calculeze următoarele limite:

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$, $b)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n 4^n}{(2n)!}}$, $c)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

R. Vom aplica rezultatul de la exercițiul 126.

$a)$ Notăm

$$a_n = \frac{x^{3n}(n!)^3}{(3n!)}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^3(n+1)^2}{3(3n+1)(3n+2)} \text{ și cum } \lim_{n\to\infty} \frac{x^3(n+1)^2}{3(3n+1)(3n+2)} = \frac{x^3}{27}$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^n}{(3n!)}} = \frac{x^3}{27}$.

b) Notăm $a_n = \frac{n^n 4^n}{(2n)!}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} 4^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n 4^n} = \frac{4^1\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2(2n+1)} \to 0$

deoarece $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, iar $\frac{4^1}{2(2n+1)} \to 0$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n 4^n}{(2n)!}} = 0$.

c) Avem $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$. Notăm $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

128. Să se determine natura şirului cu termen general

$$a_n = \frac{\frac{5}{4} + \frac{7}{4^2} + \ldots + \frac{2n+3}{4^n}}{n}$$

R. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{4^n} = 0$, rezultă, că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

129. Dacă $a_n \to +\infty$, atunci $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$.

R. Vom arăta mai întîi că dacă (k_n) este un şir de numere naturale astfel încît $k_n \to +\infty$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e\,(\alpha)$. Deoarece k_n sînt numere naturale, şirul $\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}$ este un subşir al şirului $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ şi are limita e. Rezultă că şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e$.

Să arătăm acum că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Vom presupune că $a_n \geqslant 1$, deoarece limita unui şir nu se schimbă dacă neglijăm un număr finit de termeni ai săi.

Pentru fiecare termen a_n, există un număr natural k_n astfel încît $k_n \leqslant a_n < k_n + 1$. Deoarece $a_n \to +\infty$ şi $k_n + 1 > a_n$, atunci şi $k_n + 1 \to \infty$ şi deci $k_n \to +\infty$. Folosind egalitatea (α) rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} = e.$$

De asemenea $\frac{1}{k_n} \to 0$, $\frac{1}{k_n+1} \to 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right) = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right) = 1$.

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} = e$$

şi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{1} = e.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din $k_n \leqslant a_n < k_n + 1$, deducem inegalitățile

$$\frac{1}{k_n+1} < \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{k_n}, \quad 1+\frac{1}{k_n+1} < 1+\frac{1}{a_n} \leqslant 1+\frac{1}{k_n},$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{k_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}. \text{ Deci}$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}.$$

De unde rezultă că $\lim\limits_{a_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

130. Dacă $a_n \to -\infty$, atunci $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$. Se scrie

$$\lim_{a_n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

R. Deoarece $a_n \to -\infty$, atunci $(-a_n) = b_n \to +\infty$. Avem

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1-\frac{1}{b_n}\right)^{-b_n} = \left(\frac{b_n}{b_n-1}\right)^{b_n} = \left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n-1}\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right).$$

Deoarece $b_n - 1 \to +\infty$, $\frac{1}{b_n-1} \to 0$, rezultă deci

$$\lim_{a_n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{b_n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right)^{b_n-1} \cdot \lim_{b_n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{b_n-1}\right) = e.$$

131. Dacă $a_n > 0$ și $a_n \to 0$, atunci $(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to e$.

R. Notăm $b_n = \frac{1}{a_n} > 0$; deoarece $a_n > 0$ și $a_n \to 0$, atunci $b_n \to +\infty$. Rezultă

$$(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \to e \text{ (ex. 129)}.$$

132. Dacă $a_n < 0$ și $a_n \to 0$, atunci $(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to e$.

R. Notăm $b_n = \frac{1}{a_n}$. Deoarece $a_n < 0$ și $a_n \to 0$, atunci $b_n \to -\infty$. Atunci $\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \to e$ (ex. 130).

Dar $(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}$, de unde rezultă afirmația din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

133. Să se afle limitele următoarelor șiruri date prin termenul general

a) $a_n = \left(1 + \frac{an^3 + 1}{3n^4 + 2}\right)^n$, $a \in \mathbf{R}$.

b) $b_n = \left(\cos \frac{b}{n}\right)^{n^2}$ $b \neq 0$, $b \in \mathbf{R}$.

c) $c_n = \left(\frac{an^2 + bn + 1}{an^2 + 2}\right) \sqrt{n^2 + 1}$, $a \neq 0$.

R. În general, dacă $x_n \to 1$, $y_n \to \infty$, vom scrie

$$x_n^{y_n} = (1 + x_n - 1)^{y_n} = [(1 + x_n - 1)^{\frac{1}{x_n - 1}}]^{y_n (x_n - 1)}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x_n - 1)}$.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{an^3 + 1}{3n^4 + 2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{an^3 + 1}{3n^4 + 2}\right)^{\frac{3n^4+2}{an^3+1}}\right]^{n\frac{an^3+1}{3n^4+2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{an^3+1}{3n^4+2}} = e^{\frac{a}{3}}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos \frac{b\pi}{2n}\right)^{n^2} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\cos\frac{b\pi}{n} - 1\right)}$. Dar $\cos \frac{b\pi}{n} - 1 = -2 \sin^2 \frac{b\pi}{2n}$. Deci

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\cos \frac{b\pi}{n} - 1\right) = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b^2\pi^2}{2}\left(\frac{\sin \frac{b\pi}{2n}}{\frac{b\pi}{2n}}\right)^2 = -\frac{b^2\pi^2}{2}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{b\pi}{n}\right)^{n^2} = e^{-\frac{b^2\pi^2}{2}}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(bn-1)\sqrt{n^2+1}}{an^2+2}} = e^{\frac{b}{a}}$.

134. Să se studieze șirul de termen general

$$u_n = \cos a \cdot \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2^2} \ldots \cos \frac{a}{2^n}.$$

R. Folosind identitatea $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$, putem scrie

$$u_n = \frac{\sin 2a}{2 \sin a} \cdot \frac{\sin a}{2 \sin \frac{a}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{a}{2}}{2 \sin \frac{a}{2^2}} \ldots \frac{\sin \frac{a}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{a}{2^n}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sin 2a}{\sin \frac{a}{2^n}}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin 2a}{\sin \frac{a}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 2a}{2a} \frac{\frac{a}{2^n}}{\sin \frac{a}{2^n}} = \frac{\sin 2a}{2a}$.

135. Folosind criteriul lui Cauchy, să se demonstreze convergența următoarelor șiruri de termen general

a) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

b) $b_n = \frac{\sin 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2!}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{\sin n!}{n(n+1)}$.

Scanned with OKEN Scanner

*R.*a) Vom arăta că şirul (a_n) satisface criteriul lui Cauchy, adică pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi pentru orice $p \in N$ să avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

$$a_{n+p} = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2};$$

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}.$$

Folosind inegalitatea $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, $k \geqslant 2$, întreg, vom avea

$$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Fie $\frac{1}{n} < \varepsilon$, atunci $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Dacă luăm $N(\varepsilon) = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, atunci pentru $n > N(\varepsilon)$ avem $\frac{1}{n} < \varepsilon$, deci $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

b) $$b_{n+p} = \frac{\sin 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2!}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{\sin n!}{n(n+1)} + \frac{\sin(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\sin(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)};$$

$$|b_{n+p} - b_n| = \left| \frac{\sin(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\sin(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leqslant \frac{|\sin(n+1)!|}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{|\sin(n+p)!|}{(n+p)(n+p+1)}.$$

Dar $|\sin x| \leqslant 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Deci

$$|b_{n+p} - b_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}.$$

Folosind egalitatea $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ avem

$$|b_{n+p} - b_n| \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Dacă luăm $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ atunci $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ şi, notînd $N(\varepsilon) = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$, rezultă $|b_{n+p} - b_n| < \varepsilon$, pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi pentru orice $p \in \mathbf{N}$. Deci şirul (b_n) este convergent.

136. Să se demonstreze convergenţa următoarelor serii şi să se calculeze sumele lor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n}\right)$, $a, b > 1$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}$.

Scanned with OKEN Scanner

R. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este prin definiție convergentă dacă șirul sumelor parțiale (S_n) definit prin $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, are limită finită, $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Numărul S este suma seriei.

a) $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$, sau $S_n = \dfrac{1 - \frac{(-1)^n}{2^n}}{1 + \frac{1}{2}}$,

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{3}$. Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ este convergentă și are suma $\frac{2}{3}$.

b) $S_n = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{1}{a^n}\right) +$

$+ \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \ldots + \frac{1}{b^n}\right) = \dfrac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^{n+1}}}{1 - \frac{1}{a}} + \dfrac{\frac{1}{b} - \frac{1}{b^{n+1}}}{1 - \frac{1}{b}}$;

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} = \frac{a+b-2}{(a-1)(b-1)}$.

c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{k(k+1)(k+2)}$, notăm $u_k = \frac{2k+3}{k(k+1)(k+2)}$.

Avem $\frac{2k+3}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2}$ (α).

Aducînd în membrul drept al egalității (α) la același numitor și identificînd coeficienții numărătorilor, obținem $A = \frac{3}{2}$, $B = -1$, $C = -\frac{1}{2}$.

Deci $u_k = \frac{3}{2k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2(k+2)}$.

Pentru $k = 1, 2, \ldots, n$ avem

$u_1 = \frac{3}{2\cdot 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3}$,

$u_2 = \frac{3}{2\cdot 2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2\cdot 4}$,

$u_3 = \frac{3}{2\cdot 3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2\cdot 5}$;

. . . . . .

$u_{n-2} = \frac{3}{2(n-2)} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2n}$,

$u_{n-1} = \frac{3}{2(n-1)} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+1)}$,

$u_n = \frac{3}{2n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)}$.

Scanned with OKEN Scanner

Adunînd aceste egalităţi, obţinem

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{7}{4} - \frac{3}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}.$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{7}{4}$.

137. Să se determine natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

R. Vom arăta că şirul de termen general $u_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ nu este convergent către 0.

$$u_n = \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{n^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}.$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, prin urmare seria este divergentă.

138. Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Să se calculeze $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, în cazul în care termenul general u_n se poate scrie sub forma:

$$u_n = f(n+1) - f(n).$$

R. Avem, $u_1 = f(2) - f(1)$,

$u_2 = f(3) - f(2)$

. . . . . .

$u_{n-1} = f(n) - f(n-1)$,

$u_n = f(n+1) - f(n)$.

Adunînd aceste egalităţi, avem

$$S_n = f(n+1) - f(1).$$

140. Să se determine natura seriilor date prin termenii generali:

a) $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, b) $v_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$,

c) $w_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, $n \geqslant 2$.

R. a). $u_n = \ln(n+1) - \ln n$.

Scanned with OKEN Scanner

Luăm $f(n) = \ln n$, deci $S_n = \ln(n+1) - \ln 1$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, seria este divergentă.

b) Folosim identitatea

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{artcg} \frac{x-y}{1+xy}.$$

Luăm $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{n+1}$ și avem

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}, \text{ deci}$$

$u_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}$. De aici deducem

$$S_n = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}, \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4}.$$

c) $W_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}$

$$S_n = \ln \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} + \ldots + \ln \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} =$$

$$= \ln \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\ldots\ldots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} = \ln \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln \frac{1}{2}$.

141. Să se determine natura seriei de termen general

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})^p}{(\sqrt[3]{8n^4+1} + \sqrt[3]{n^4+2})^q}, \quad p, q \in \mathbf{R}.$$

R. Avem

$$u_n = \frac{2^p}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^p\,(\sqrt[3]{8n^4+1}+\sqrt[3]{n^4+2})^q}.$$

Considerăm seria de termen general $v_n = \frac{1}{n^{\frac{p}{2}+\frac{4q}{3}}}$.

Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{3^q}.$$

Deci seriile cu termenii generali u_n și v_n au aceeași natură. Dar seria de termen general v_n este convergentă dacă $\frac{p}{2} + \frac{4q}{3} > 1$ și divergentă dacă $\frac{p}{2} + \frac{4q}{3} \leqslant 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Luăm $f(n) = \ln n$, deci $S_n = \ln(n+1) - \ln 1$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, seria este divergentă.

b) Folosim identitatea

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{artcg} \frac{x-y}{1+xy}.$$

Luăm $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{n+1}$ și avem

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}, \text{ deci}$$

$u_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}$. De aici deducem

$$S_n = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}, \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4}.$$

c) $W_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}$

$$S_n = \ln \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \ldots + \ln \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \ln \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \ldots \ldots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \ln \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln \frac{1}{2}$.

141. Să se determine natura seriei de termen general

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})^p}{(\sqrt[3]{8n^4+1} + \sqrt[3]{n^4+2})^q}, \quad p, q \in \mathbf{R}.$$

R. Avem

$$u_n = \frac{2^p}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})^p \, (\sqrt[3]{8n^4+1} + \sqrt[3]{n^4+2})^q}.$$

Considerăm seria de termen general $v_n = \frac{1}{n^{\frac{p}{2} + \frac{4q}{3}}}$.

Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{3^q}.$$

Deci seriile cu termenii generali u_n și v_n au aceeași natură. Dar seria de termen general v_n este convergentă dacă $\frac{p}{2} + \frac{4q}{3} > 1$ și divergentă dacă $\frac{p}{2} + \frac{4q}{3} \leqslant 1$.

Scanned with OKEN Scanner

142. Să se determine natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2n+3}-\sqrt[3]{n^2+n+3}}{\sqrt{n(n^3+n^2+2)}}.$$

R. Avem

$$u_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+2n+3}-\sqrt[3]{n^2+n+3}}{\sqrt{n(n^3+n^2+2)}} < \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ fiind convergentă, rezultă că și seria de termen general u_n este convergentă.

143. Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,a^n}{n^n}, \quad a > 0.$$

R. Aplicăm criteriul raportului

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!\,a^{n+1}}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!\,a^n} = \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{e}.$$

Deci, dacă $a < e$ seria este convergentă, iar dacă $a > e$ este divergentă. Dacă $a = e$ criteriul raportului nu ne dă nici o indicație.

Pentru $a = e$, avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Dar $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$. Atunci $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, sau $u_{n+1} > u_n$ și, cum $u_1 > 1$, rezultă că termenul general al seriei nu tinde la zero, deci seria este divergentă.

144. Să se studieze natura seriilor:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$.

R. a) Avem $u_1 = \sqrt{2} = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{4}$,

$$u_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}} = 2\sin\frac{\pi}{8}, \quad u_3 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2\sin\frac{\pi}{16}, \ldots$$

$$u_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Aplicăm criteriul raportului

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \text{ și } \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}.$$

b) $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Deci $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1$. Deci seria este convergentă.

c) $u_n = \frac{4^n n!}{n^n}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{4}{e} > 1$. Deci seria este divergentă.

145. Să se determine natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x+x^2+\ldots+x^n)}, \quad x > 0.$$

R. Notăm $u_n = \frac{1}{n(1+x+x^2+\ldots+x^n)}$. Dacă $0 < x < 1$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x+x^2+x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x}{1-x^{n+1}} = 1-x$$

deoarece $x^{n+1} \to 0$, cînd $n \to \infty$.

Deci seria de termen general $u_n = \frac{1}{n(1+x+x^2+\ldots+x^n)}$ are aceeași natură cu seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ care este divergentă.

Dacă $x = 1$, atunci seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n)}$ și, deoarece $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, rezultă că în acest caz seria este convergentă.

Dacă $x > 1$, atunci $\frac{1}{n(1+x+x^2+\ldots+x^n)} < \frac{1}{x^n}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

Dar seria geometrică $\sum_{n=1} \frac{1}{x^n}$ de rație $\frac{1}{x} < 1$ este convergentă. În baza criteriului comparației deducem că și seria dată este convergentă.

146. Să se studieze seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n (n!)^2}{(2n)!}, \quad a > 0.$$

R. Avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}(n+1)!^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{a^n (n!)^2} = \frac{a(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{a(n+1)}{2(2n+1)}$ și $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

Seria este convergentă pentru $a < 4$ și divergentă pentru $a > 4$.
Pentru $a = 4$ aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+2} = -\frac{1}{2}.$$

Deci seria este divergentă.

147. Să se determine natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)+\ldots+(p+n-1)}{q(q+1)\ldots(q+n-1)}(\lambda-2)^n, \quad p, q > 0, \quad \lambda > 2.$$

R. Avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{p+n}{q+n}(\lambda-2)$, deci $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda - 2$.

Deci seria este convergentă pentru $\lambda < 3$ și divergentă pentru $\lambda > 3$ oricare ar fi p, $q > 0$.
Pentru $\lambda = 3$, criteriul raportului nu ne mai spune nimic.
Vom aplica criteriul Raabe-Duhamel.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(q-p)n}{p+n} = q - p.$$

Vom avea deci cazurile:
$q - p > 1$, seria obținută este convergentă;
$q - p < 1$, seria obținută este divergentă.

Pentru $q = p + 1$ obținem seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{n+p}$. Considerăm seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p}{p+n}}{\frac{1}{n}} = p.$$

Deci în acest caz seria este divergentă.

148. Să se studieze convergența următoarelor serii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\frac{n^3+n+1}{n^3}\right)^n$, $\lambda > 0$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)^n}{\sqrt{(25n^2+4n+1)^{n+1}}}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^{n^2}\alpha^n$; $\alpha > 0$.

R. În toate cazurile vom aplica criteriul rădăcinii.

a) $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n^3+n+1}{n^3}\lambda$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lambda$.

Rezultă că pentru $\lambda < 1$, seria este convergentă, iar pentru $\lambda > 1$, seria este divergentă.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\lambda = 1$, obținem seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3+n+1}{n^3}\right)^n$. Calculăm $\lim_{n\to\infty} u_n =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+n+1}{n^3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n+1}{n^3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{n+1}{n^3}\right)^{\frac{n^3}{n+1}}\right]^{\frac{n(n+1)}{n^3}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^3}} = 1.$$

Deci seria este, în acest caz, divergentă.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim \dfrac{4n}{(25n^2+4n+1)^{\frac{n+1}{2n}}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{(25n^2+4n+1)^{\frac{1}{2}}\,(25n^2+4n+1)^{\frac{1}{2n}}} = \frac{4}{5} < 1$$ și deci seria este convergentă.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \alpha e$. Deci, dacă $\alpha < \frac{1}{e}$, seria este convergentă, iar dacă $\alpha > \frac{1}{e}$ seria este divergentă.

Dacă $\alpha = \frac{1}{e}$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$.

Folosim inegalitatea

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e \quad \text{pentru orice } n \in \mathbf{N}.$$

Deci $e^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n}$.

Atunci $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n > \frac{1}{e}$.

Rezultă că șirul termenilor seriei considerate nu converge la 0, deci seria este divergentă.

149. Să se determine natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \ln n}{(\sqrt[3]{an^3+n^2+1} + \sqrt{2n^2+1})^x}, \quad a > 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

R. $u_n = \dfrac{n^2 \ln n}{(\sqrt[3]{an^3+n^2+1} + \sqrt{2n^2+1})^x} = \dfrac{n^2 \ln n}{n^x \left(\sqrt[3]{a+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} + \sqrt{2+\frac{1}{n^2}}\right)^x}$.

Considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{x-2}}$. Fie $v_n = \frac{\ln n}{n^{x-2}}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{(\sqrt[3]{a}+\sqrt{2})^x}$ atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{x-2}}$ sînt de aceeași natură.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{x-2}}$ aplicăm criteriul logaritmic,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{v_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-2)\ln n - \ln(\ln n)}{\ln n} = x - 2.$$

Distingem cazurile:

1) $x > 3$, seria este convergentă,
2) $x < 3$, seria este divergentă,
3) $x = 3$, atunci termenul general al seriei devine $v_n = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$,

dacă $n \geqslant 3$. În acest caz seria este divergentă.

150. Să se studieze natura seriei de termen general

$$u_n = (2n+1)\left[\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}\right]^2, \quad a \in \mathbf{R}.$$

R. Aplicăm criteriul raportului:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{a-n}{a+n+1}\right)^2 \cdot \frac{2n+3}{2n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Aplicăm criteriul lui Raabe-Dühamel

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\,\frac{2(4a+1)n^2 + 2(5a+2)n - 2a^2 + 2a + 1}{(2n+3)(a+n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 4a + 1.$$

Dacă $4a + 1 > 1$, adică $a > 0$, seria este convergentă.
Dacă $a < 0$, seria este divergentă.
Dacă $a = 0$, atunci $u_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ și deci seria în acest caz este convergentă.

151. Să se demostreze că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

este semiconvergentă.

R. Va trebui să arătăm că seria dată este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Să considerăm șirul modulelor termenilor seriei date. Avem

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} < \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = u_n$$

și $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = 0$. Deci șirul modulelor termenilor seriei date este descrescător și convergent la 0. Conform criteriului lui Leibniz, seria va fi convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

Seria modulelor este $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Considerăm seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă.

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = 1$, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ este divergentă.

De aici rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ nu este absolut convergentă.

152. Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

R. Vom arăta că seria este absolut convergentă. Într-adevăr, deoarece $\frac{|\sin nx|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$, rezultă că seria este absolut convergentă deci și convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IV

FUNCȚII DE O SINGURĂ VARIABILĂ. LIMITE. CONTINUITATE

153. Să se determine domeniul maxim de definiție al funcțiilor

a) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3-7x+6}{x^2+5x+4}}$, b) $g(x)=\frac{\sqrt{x^3-7x+6}}{\sqrt{x^2+5x+4}}$,

c) $h(x)=\arcsin\frac{3x}{x+2}$, d) $k(x)=\frac{|x+1|}{\ln|x+1|}$.

R. a) Trebuie să avem

$$\frac{x^3-7x+6}{x^2+5x+4}\geqslant 0, \qquad x^2+5x+4\neq 0.$$

Însă

$$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3), \qquad (x^2+5x+4)=(x+1)(x+4).$$

Folosind tabloul

x	$-\infty$		-4		-3		-1		1		2		$+\infty$
x^3-7x+6	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
x^2+5x+4	$+$	$+$	0	$-$	$-$		0	$+$	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$		$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

rezultă că $x\in(-4,-3]\cup(-1,1]\cup[2,+\infty)$.

b) Domeniul maxim de definiție este dat de inegalitățile

$$x^3-7x+6\geqslant 0, \qquad x^2+5x+4>0.$$

Folosind tabloul anterior, deducem că $x\in(-1,1]\cup[2,+\infty)$.

c) Trebuie să avem: $-1\leqslant\frac{3x}{x+2}\leqslant 1$, $x+2\neq 0$, sau

$$\frac{2(x-1)}{x+2}\leqslant 0, \qquad \frac{2(2x+1)}{x+2}\geqslant 0, \qquad x\neq -2.$$

Deci $x\in(-2,1]\cap\left\{(-\infty,-2)\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)\right\}=\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

d) Trebuie să avem $\ln|x+1| \neq 0$ și $|x+1| \neq 0$, adică

$$|x+1| \neq 1 \quad \text{și} \quad x \neq -1;$$

de unde rezultă $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

154. Să se studieze semnul valorilor funcțiilor:

a) $f(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^2 + 8x + 8$;

b) $g(x) = \dfrac{x^4 - a^4}{(x^2+1)(x^3-4x)}$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$;

c) $h(x) = \dfrac{x^4 - 4a^2x^2 + 3a^4}{\sqrt[3]{1-x^3}}$, $x \neq 1$.

R. a) Avem $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^2 + 8x + 8 = (x+1)^2(x^2+2)(x-2)^2$.

Rezultă că $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Avem $x^4 - a^4 = (x-a)(x+a)(x^2+a^2)$.

Semnul lui $g(x)$ este același cu semnul produsului $x(x^2-a^2)(x^2-4)$.

Deosebim cazurile:

$-2 < a < 2$

x	$-\infty$		-2		$-a$		0		$+a$		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$a = \pm 2$ $\quad g(x) = \dfrac{x^2+4}{x(x^2+1)}$, $\quad g(x) = \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases}$

$a \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

x	$-\infty$		$-a$		-2		0		2		a		$+\infty$
	$-$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

c) $h(x) = \dfrac{(x^2-3a^2)(x^2-a^2)}{\sqrt[3]{(1-x)(x^2+x+1)}}$.

Semnul funcției $h(x)$ va fi același cu al funcției

$$k(x) = (x^2-3a^2)(x^2-a^2)(1-x).$$

Ecuația $k(x) = 0$ are rădăcinile $x = \pm a\sqrt{3}, \pm a, 1$.

Semnul funcției rezultă din:

$|a| > 1$

x	$-\infty$		$-a\sqrt{3}$		$-a$		1		a		$a\sqrt{3}$		$+\infty$
$k(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\dfrac{\sqrt{3}}{3} < |a| < 1$

x	$-\infty$		$-a\sqrt{3}$		$-a$		a		1		$a\sqrt{3}$		$+\infty$
$k(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Scanned with OKEN Scanner

$|a| > \frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$		$-a\sqrt{3}$		$-a$		a		$a\sqrt{3}$		1		$+\infty$
$k(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

$|a| = \frac{3}{3}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
$k(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	

155. Să se calculeze $f(0)$, $f(x+1)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(1+\sqrt{x^2+1})$ dacă $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

R. $f(0) = 1$, $f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(1+x)} = \frac{-x}{x+2}$,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1},\quad f(1+\sqrt{x^2+1}) = \frac{-\sqrt{x^2+1}}{2+\sqrt{x^2+1}}.$$

156. Să se arate că dacă $f(x) = ax^2 + bx + c$, atunci pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem:

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0, \quad (\alpha).$$

R. Avem

$f(x+3) = a(x^2+6x+9) + b(x+3) + c,$

$f(x+2) = a(x^2+4x+4) + b(x+2) + c,$

$f(x+1) = a(x^2+2x+1) + b(x+1) + c.$

Se înlocuiește în identitatea (α) și se observă că este satisfăcută identic.

157. Să se determine funcția

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, știind că

$f(-1) = 0$, $f(0) = 2$; $f(1) = -3$; $f(2) = 5$.

R. Obținem sistemul

$$\begin{cases} -a + b - c + d = 0, \\ \qquad\qquad d = 2, \\ a + b + c + d = -3, \\ 8a + 4b + 2c + d = 5, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} -a + b - c = -2, \\ a + b + c = -5, \\ 8a + 4b + 2c = 3. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd acest ultim sistem rezultă

$$a = \frac{10}{3}, \qquad b = -\frac{7}{2}, \qquad c = -\frac{29}{6}, \qquad d = 2,$$

deci $f(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{21}{6}x + 2.$

158. Să se determine care din funcţiile date mai jos sînt pare şi care sînt impare:

a) $f(x) = \ln(2x^3 + \sqrt{1 + 4x^6}), \quad x \in \mathbf{R},$

b) $g(x) = \sqrt[5]{(1 - x^3)^4} + \sqrt[5]{(1 + x^3)^4}, \quad x \in \mathbf{R},$

c) $h(x) = ax^3 - bx^5, \quad a, b, x \in \mathbf{R},$

d) $m(x) = \ln \frac{x^3 + a}{a - x^3}, \quad a \in \mathbf{R}, \quad \frac{x^3 + a}{a - x^3} > 0, \quad x \neq \sqrt[3]{a},$

e) $n(x) = \frac{1}{2}(b^x + b^{-x}), \quad b > 0.$

R. Se spune că funcţia $u(x)$: $(-l, l)$ este pară dacă

$$f(-x) = f(x), \qquad x \in (-l, l),$$

şi impară dacă

$$f(-x) = -f(x), \qquad x \in (-l, l).$$

a) $f(-x) = \ln(\sqrt{1 + 4x^6} - 2x^3) = \ln \frac{1}{(\sqrt{1 + 4x^6} + 2x^3)} =$

$$= -\ln(2x^3 + \sqrt{1 + 4x^6}), \text{ impară.}$$

b) $g(-x) = \sqrt[5]{(1 + x^3)^4} + \sqrt[5]{(1 - x^3)^4} = g(x)$, pară.

c) $h(-x) = -ax^3 + bx^5 = -(ax^3 - bx^5) = -h(x)$, impară.

d) $m(-x) = \ln \frac{a - x^3}{a + x^3} = -\ln \frac{a - x^3}{a - x^3} = -m(x)$, impară.

e) $n(-x) = \frac{1}{2}(b^{-x} + b^x) = n(x)$, pară.

159. Să se inverseze următoarele funcţii pe intervalele de monotonie:

a) $f(x) = 3x + 4, \quad x \in \mathbf{R},$

b) $g(x) = \frac{2 - x}{2 + x}, \quad x \neq -2;$

c) $h(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbf{R}.$

Pentru funcţiile inverse să se verifice mulţimea de definiţie.

R. a) Notăm $y = f(x)$, $y = 3x + 4 \Rightarrow x = \frac{y - 4}{3}$, deci

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 4}{3}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) $y = \frac{2-x}{2+x} \Rightarrow x = \frac{2(1-y)}{1+y}$, $y \neq -1$.

Deci $g^{-1}(x) = \frac{2(1-x)}{1+x}$, $x \neq -1$.

c) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$, rezultă

$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$, de unde

$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$, dar $e^x > 0$ deci singura soluție rămîne, $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$.
De aici rezultă $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

Deci $h^{-1}(x) = \operatorname{arg\,sh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $x \in \mathbf{R}$.

160. Folosind definiția să se arate că

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 1) = -3.$$

R. Vom arăta că pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice x satisfăcînd neegalitatea

$$|x-2| < \eta(\varepsilon) \quad \text{să avem} \quad |(x^2 - 4x + 1) + 3| < \varepsilon, \quad (\alpha).$$

Dar $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, și deoarece $|x-2| < \eta(\varepsilon)$, avem

$$|x^2 - 4x + 4| < \eta^2.$$

Dacă luăm $0 < \eta < \sqrt{\varepsilon}$ atunci inegalitatea (α) este satisfăcută.

161. Să se arate că funcția

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{nu are limita în} \quad x = 0.$$

R. Dacă funcția $f(x)$ ar avea limita în punctul $x = 0$, ar însemna ca să existe un număr l (finit sau infinit), astfel ca pentru orice șir $x_n \neq 0$, $x_n \to 0$, să avem $f(x_n) \to l$.

Considerăm două șiruri

$$x_n' = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{și} \quad x_n'' = \frac{1}{2n + \frac{\pi}{2}}.$$

Avem $x_n' \to 0$, $x_n'' \to 0$.

Dar $f(x_n') = 2n\pi \cos 2n\pi = 2n\pi$, de unde

$\lim_{n \to \infty} f(x_n') = +\infty$;

$f(x_n'') = \left(2n + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, de unde

$\lim_{n \to \infty} f(x_n'') = 0$. Rezultă că funcția $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ nu are limita în punctul $x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

162. Să se calculeze următoarele limite

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,\ n\in\mathbf{N}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$,

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+6x}-5}{\sqrt{x}-2}$,

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{3+x+4x^2}-\sqrt{5-x+4x^2})$.

R. a) $(1+mx)^n=1+mnx+\dfrac{n(n-1)}{2}m^2x^2+\ldots+m^nx^n$

$$(1+nx)^m=1+nmx+\frac{m(m-1)}{2}n^2x^2+\ldots n^mx^m$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{mn}{2}(n-m)x^2+C_n^3(mx)^3-C_m^3(nx)^3+\ldots}{x^2}=$$

$$=\frac{mn}{2}(n-m).$$

b) Avem $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ şi

$$x^4-4x+3=(x-1)^2(x^2+2x+3),$$

deci

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

c) Trecînd la limită obţinem cazul $\dfrac{0}{0}$.

Putem scrie

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+6x}-5}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(6x-24)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+6x}+5)}=\frac{12}{5}.$$

d) Atît pentru $x\to+\infty$, cît şi pentru $x\to-\infty$ avem nedeterminarea de forma $\infty-\infty$.

Putem scrie în ambele cazuri

$$\sqrt{3+x+4x^2}-\sqrt{5-x+4x^2}=\frac{2x-2}{\sqrt{3+x+4x^2}+\sqrt{5-x+4x^2}}=$$

$$=\frac{2x-2}{|x|\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)}.$$

Dacă $x>0$ atunci $|x|=x$, deci

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3+x+4x^2}-\sqrt{5-x+4x^2})=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\frac{1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x < 0$ atunci $|x| = -x$ și deci

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3+x+4x^2}-\sqrt{5-x+4x^2}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}=-\frac{1}{2}.$$

163. Să se calculeze limita funcției:

$$f(x)=\frac{x}{4}E\left(\frac{3}{x}\right),\quad x\neq 0 \text{ în punctul } x=0.$$

R. Vom calcula limitele laterale.

a) $f(0-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x}{4}E\left(\frac{3}{x}\right)$ și b) $f(0+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{4}E\left(\frac{3}{x}\right)$.

a) Folosim inegalitatea

$$\frac{3}{x}-1<E\left(\frac{3}{x}\right)\leqslant\frac{3}{x},\quad(\alpha).$$

Înmulțim inegalitatea (α) cu $\frac{x}{4}<0$ și avem

$$\frac{3}{4}\leqslant\frac{x}{4}E\left(\frac{3}{x}\right)<\frac{x}{4}\left(\frac{3}{x}-1\right).$$

Rezultă

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x}{4}\left(\frac{3}{x}-1\right)=\frac{3}{4},\quad\text{deci}$$

$$f(0-0)=\frac{3}{4}.$$

b) Înmulțim inegalitatea (α) cu $\frac{x}{4}>0$ și obținem

$$\frac{x}{4}\left(\frac{3}{x}-1\right)<\frac{x}{4}E\left(\frac{3}{x}\right)\leqslant\frac{3}{4},$$

deci $f(0+0)=\frac{3}{4}$.

Din a) și b) rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{4}E\left(\frac{3}{x}\right)=\frac{3}{4}$.

164. Să se arate că dacă f și g sînt două funcții definite pe mulțimea X și $f(x)>0$, iar $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$, iar $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$, atunci

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]g(x)}.$$

R. Vom presupune $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$ (pentru cazul $-\infty$ demonstrația este identică).

Scanned with OKEN Scanner

Fie $x_n \in X$ un șir astfel ca $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Deoarece

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ și $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, notînd $f_n = f(x_n)$ și $g_n = g(x_n)$

rezultă: $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} g_n = +\infty$.

Putem scrie

$$(f_n)^{g_n} = \{[1 + (f_n - 1)]^{\frac{1}{f_n - 1}}\}^{g_n (f_n - 1)}.$$

Dacă notăm $f_n - 1 = \frac{1}{a_n}$, atunci $a_n \to \infty$, de unde rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e = \lim_{n \to \infty} (f_n)^{\frac{1}{f_n - 1}},$$

deci,

$$\lim_{n \to \infty} (f_n)^{g_n} = e^{\lim\limits_{n \to \infty} (f_n - 1) g_n}.$$

Dar șirul (x_n) a fost ales arbitrar, deci rezultă afirmația.

165. Fie funcția $u : X \to \mathbf{R}$. Să se arate că dacă

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$ atunci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a \quad , \quad a > 0.$$

R. Fie $x_n \in X$ un șir $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Notînd $u_n = u(x_n)$ avem $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(x) = 0$ și rămîne deci să aflăm limita șirului, de termen general

$$v_n = \frac{a^{u_n} - 1}{u_n}.$$

Să notăm $y_n = a^{u_n} - 1$.

Rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$ și $u_n = \ln(1 + y_n) \cdot \frac{1}{\ln a}$.

Avem deci

$$v_n = \frac{a^{u_n} - 1}{u_n} = \ln a \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)} = \frac{\ln a}{\ln(1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}}}.$$

Dar $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e$, deci $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a^{u_n} - 1}{u_n} = \ln a$.

166. Să se arate că dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1.$$

R. Luăm în exercițiul 19, $a = e$.

Scanned with OKEN Scanner

167. Să se calculeze

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{x+x^2+1}{x+x^2-1}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}}$.

R. Folosim rezultatul de la exercițiul 18

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)\cdot\frac{1}{x}}$$

Calculăm

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a(a^x-1)+b(b^x-1)+c(c^x-1)}{(a+b+c)}=$$

$$=\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c}=\ln(a^a\cdot b^b\cdot c^c)^{\frac{1}{a+b+c}},\quad a,\ b,\ c>0,$$

deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b^x-1}{x}=\ln b$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c^x-1}{x}=\ln c$ (Ex. 19).

Deci $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln(a^ab^bc^c)\frac{1}{a+b+c}}=(a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$.

$$\text{b)}\ \lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}}{\ln^2\frac{x+1}{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)}{\ln^2\left(1+\frac{2}{x-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2+1-x^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}}}{\left[\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^2}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{(x-1)^2}{4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x-1)^2}{4(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{1}{8}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\frac{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}}$

Dar $\dfrac{\cos x+\sin x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]}{\sqrt{2}}=-2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$.

Deci

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\frac{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}}\cdot\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\cdot\sqrt{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}}=0.$$

Așadar $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}}=1.$

168. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x\cdot e^x)-\cos(x e^{-x})}{x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$.

R. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{x(e^{-x}-e^x)}{2}\sin\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}}{x^3}=$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x(e^{-x}-e^x)}{2}}{x\frac{e^{-x}-e^x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}}\cdot\frac{1}{2}\frac{e^{4x}-1}{xe^{2x}}=-2,\quad\text{deoarece}\quad\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{x}=4.$$

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-a^a}{x-a}-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^a}{x-a}$.

Scanned with OKEN Scanner

Calculăm separat cele două limite. Avem

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^a(a^{x-a}-1)}{x-a}=a^a\ln a \text{ (vezi ex. 19), și}$$

$$\frac{x^a-a^a}{x-a}=\frac{e^{\ln x^a}-e^{\ln a^a}}{x-a}=\frac{e^{\ln a^a}e^{a\ln\frac{x}{a}}-1}{x-a}=a^a\frac{e^{a\ln\frac{x}{a}}-1}{a\ln\frac{x}{a}}\cdot\ln\left(1-\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}.$$

Dar

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{a\ln\frac{x}{a}}-1}{a\ln\frac{x}{a}}=1;\qquad \lim_{x\to a}\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}=1,$$

de unde $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^a}{x-a}=a^a.$

Deci $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}=a^a(\ln a-1).$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}=\lim_{x\to 0}e^{bx}\frac{e^{(a-b)x}-1}{2\sin\frac{a-b}{2}x\cos\frac{a+b}{2}x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{bx}\frac{e^{(a-b)x}-1}{(a-b)x}\cdot\frac{\frac{a-b}{2}x}{\sin\frac{a-b}{2}x}\cdot\frac{1}{\cos\frac{a+b}{2}x}=1.$$

169. Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x).$$

R. $$\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)=\lim_{x\to\infty}x[(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})+$$

$$+(x-\sqrt{x^2+x})]=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\frac{x-\sqrt{x^2+2x}}{(x+\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3}{(x+\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x})(x+\sqrt{x^2+2x}}=-\frac{1}{4}.$$

170. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{27+x}-\sqrt[4]{27-x}}{x+2\sqrt[4]{x^4}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Trecînd la limită avem $\frac{0}{0}$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{27+x}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{27-x}=3$ putem scrie

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt[3]{27+x}-3}{x(1+2\sqrt[3]{x})}-\frac{\sqrt[3]{27-x}-3}{x(1+2\sqrt[3]{x})}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+2\sqrt[3]{x})\,(\sqrt[3]{(27+x)^2}+3\sqrt[3]{(27-x)}+9}+$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+2\sqrt[3]{x})\,(\sqrt[3]{(27-x)^2}+3\sqrt[3]{27-x}+9}=\frac{2}{27}.$$

171. Se dă funcţia

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, & x<0\\[2ex] (1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}, & x>0.\end{cases}$$

Să se cerceteze dacă funcţia $f(x)$ are limită în punctul 0.

R. Calculăm limitele laterale ale funcţiei în punctul $x=0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left[1+\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)\right]^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}}.$$

Dar

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos 2x}=-\frac{3}{2},\quad \text{deci}\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=e^{-\frac{3}{2}},$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}[(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}}]^{\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to x\\ x>0}}\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}=e^{\frac{1}{2}}.$$

De unde rezultă $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$, deci, funcţia nu are limită în punctul $x=0$.

172. Să se determine α astfel încît funcţia

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}, & \text{dacă } x>1\\[2ex] \dfrac{\operatorname{tg}\alpha(x-1)}{\sin 2(x-1)}, & \text{dacă } x<1,\end{cases}$$

să aibă limită în punctul $x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

R. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(2x-\sqrt{x^2+3})(2x+\sqrt{x^2+3})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2})(\sqrt{x+3}+2x+2)} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}{2x+\sqrt{x^2+3}} =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{3(x^2-1)}{1-x} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}}{2x+\sqrt{x^2+3}} = -6,$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\operatorname{tg}\alpha(x-1)}{\sin 2(x-1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\alpha \frac{\operatorname{tg}\alpha(x-1)}{\alpha(x-1)}}{2\frac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)}} = \frac{\alpha}{2}.$

Rezultă că $\frac{\alpha}{2} = -6$, deci pentru $\alpha = -12$, funcția $f(x)$ are limita în punctul $x = 1$.

173. Să se studieze continuitatea funcției

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x+1}}}, & x(-\infty, -1)\cup(-1, +\infty), \\ 0, & x = -1. \end{cases}$$

R. În orice punct $x \neq -1$ funcția $f(x)$ este continuă. Rămîne să studiem continuitatea în punctul $x = -1$.

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x+1}}} = 0, \quad \text{deoarece} \quad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} 3^{\frac{1}{x+1}} = +\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = 1, \quad \text{deoarece} \quad \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} 3^{\frac{1}{x+1}} = 0.$$

Deci funcția este continuă la dreapta în $x = -1$, dar nu este continuă la stînga cu $x = -1$

Punctul $x = -1$ este punct de discontinuitate de prima speță.

174. Să se studieze continuitatea funcției:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+e^{\frac{1}{\sin x}}}{x-\pi}, & x\in\mathbf{R},\quad x\neq k\pi,\quad k\in\mathbf{N} \\ 1, & x = k\pi \end{cases}$$

în punctul $k\pi$.

R. În punctele $x = 2k\pi$ avem

$$f(2k\pi - 0) = \frac{2k\pi}{2k\pi-\pi} = \frac{2k}{2k-1} > 0, \qquad f(2k\pi) = 1$$

$$f(2k\pi + 0) = +\infty,$$

deci funcția are discontinuitate de a doua speță.

Scanned with OKEN Scanner

În punctul $x = \pi$ avem

$$f(\pi - 0) = -\infty, \quad \text{căci} \quad \lim_{x \to \pi - 0} \frac{1}{\sin x} = +\infty$$

$$f(\pi) = 1, \quad f(\pi + 0) = +\infty, \quad \text{căci} \quad \lim_{x \to \pi + 0} \frac{1}{\sin x} = -\infty,$$

deci funcția are discontinuitate de speța a doua.

În punctele $x = (2k - 1)\pi \quad k \neq 1$ avem

$$f[(2k - 1)\pi - 0] = +\infty,$$

$$f[(2k - 1)\pi] = 1,$$

$$f[(2k - 1)\pi + 0] = \frac{2k - 1}{2(k - 1)}.$$

Avem deci tot punct de discontinuitate de speța a doua.

175. Să se studieze continuitatea funcției

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(x - 1) \sin \dfrac{1}{x - 1}, & x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ \dfrac{\cos \dfrac{1}{x - 1}}{e^{\frac{1}{x-1}}}, & x > 1, \end{cases}$$

în punctul $x = 1$.

R. Avem

$$|f(x)| = \begin{cases} |\operatorname{tg}(x - 1)| \cdot \left| \sin \dfrac{1}{x - 1} \right|, & x < 1; \\ 0, & x = 1; \\ \dfrac{\left| \cos \dfrac{1}{x - 1} \right|}{e^{\frac{1}{x-1}}}, & x > 1. \end{cases}$$

Dar $\left| \sin \dfrac{1}{x - 1} \right| \leqslant 1$, $\left| \cos \dfrac{1}{x - 1} \right| \leqslant 1$ oricare ar fi $x \neq 1$, $x \in \mathbf{R}$. Deci

$$|f(x)| \leqslant g(x) = \begin{cases} |\operatorname{tg}(x - 1)|, & x < 1; \\ 0, & x = 1; \\ \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}}, & x > 1. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\lim\limits_{x\to 1-0} |\operatorname{tg}(x-1)| = 0$ și $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}} = 0$, rezultă că

$f(1-0)=0$, $f(1+0)=0$ și cum $f(1)=0$, deci funcția este continuă în punctul $x=1$.

176. Să se studieze continuitatea funcției

$$f(x)=\begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x^p}, & n, p\in\mathbf{N}, \quad \text{dacă} \quad x>0, \\ -x^3+x, & \text{dacă} \quad x\leqslant 0, \end{cases}$$

în punctul $x=0$.

R. $0\leqslant\left|x^n\sin\frac{1}{x^p}\right|\leqslant|x|^n$ deci $f(0+0)=0$;

$f(0-0)=0$; $f(0)=0$.

Deci $f(x)$ este continuă în punctul $x=0$.

177. Să se arate că funcția:

$$f(x)=\frac{1}{x-1}, \qquad x\neq 1$$

nu este uniform continuă în intervalul $(1, 2)$ dar este uniform continuă în intervalul $[2, 3]$.

R. Dacă funcția ar fi uniform continuă pe $[1, 2]$, ar trebui ca pentru orice număr $\varepsilon>0$ să existe un număr $\eta(\varepsilon)>0$ așa încît pentru orice $x', x''\in[1, 2]$ cu $|x'-x''|<\eta(\varepsilon)$ să avem

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Să considerăm $\varepsilon=\frac{1}{2}$ și $x'=1+\frac{1}{n}$, $x''=1+\frac{1}{n+1}$.

Dar $x', x''\in(1, 2]$ și pentru n suficient de mare ele sînt situate la o distanță oricît de mică unul de altul. Avem $|f(x')-f(x'')|=1>\frac{1}{2}$. Deci diferența $|f(x')-f(x'')|$ nu poate fi făcută mai mică decît $\frac{1}{2}$.

Să arătăm că funcția este uniform continuă pe $[2, 3]$.

Fie $x'<x''$, $x', x''\in[2, 3]$. Avem

$$f(x')-f(x'')=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x''-1}=\frac{x''-x'}{(x'-1)(x''-1)}<x''-x'.$$

Deci pentru orice $\varepsilon>0$ există un număr $\eta(\varepsilon)$ pe care-l luăm egal cu $\frac{\varepsilon}{2}$ astfel ca pentru orice $x', x''\in[2, 3]$, astfel ca $|x'-x''|<\eta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$ să avem $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

178. Să se studieze continuitatea uniformă a funcţiilor:

a) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^3+1}\sin^2 x^3, \qquad x \in [0, \infty).$

b) $g(x) = -\dfrac{x^3+2}{x^2+1}\cos^2 x^3, \qquad x \in [0, \infty).$

c) $h(x) = f(x) - g(x), \qquad x \in [0, 1].$

R. a) Considerăm

$$x_k' = \sqrt[3]{2k\pi}, \quad x_k'' = \sqrt[3]{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Diferenţa $|x' - x''| = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt[3]{\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2} + \sqrt[3]{2k\pi\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)} + \sqrt[3]{(2k\pi)^2}}$ poate fi făcută oricît de mică pentru k suficient de mare.

Dar $|f(x') - f(x'')| = \left|\dfrac{2k\pi+2}{2k\pi+1}\sin^2 2k\pi - \dfrac{2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2}{2k\pi + \frac{\pi}{2} + 1}\sin^2\left(2k + \frac{\pi}{2}\right)\right| =$

$= 1 + \dfrac{2}{4k\pi + \pi + 2} > 1$, deci $f(x)$ nu este uniform continuă.

b) Se consideră aceleaşi şiruri ca în cazul anterior şi se procedează analog.

c) Avem $h(x) = \dfrac{x^3+2}{x^3+1} = 1 + \dfrac{1}{1+x^3}, \qquad x \in [0, 1].$

Fie $x', x'' \in [0, 1]$. Avem

$$|h(x') - h(x'')| = \left|\frac{(x'')^3 - (x')^3}{(x'^3+1)(x''^3+1)}\right| < 3|x'' - x'|.$$

Dacă pentru $\varepsilon > 0$ luăm $\eta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{3}$ şi dacă $|x' - x''| < \eta(\varepsilon)$ rezultă $|h(x') - h(x'')| < \varepsilon$. Deci $h(x)$ este uniform continuă pe $[0, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

DERIVATE. DIFERENȚIALE

179. Folosind definiția, să se calculeze derivatele următoarelor funcții (în punctele indicate):

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbf{R}$, în punctul $x = 1$.

b) $g(x) = \cos 4x$, $x \in \mathbf{R}$, în punctul $x = \frac{\pi}{6}$.

R. a) Derivata funcției $f(x)$ în punctul $x = 1$ este dată de

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(1 + \sqrt{2})}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{1 + \sqrt{2}}\right)}{x - 1} = \ln e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1 + \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})(x - 1)}} =$$

$$= \frac{1}{1 + 2} + \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})(x - 1)} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) $$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos 4x - \cos \frac{2\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{6}} = -2 \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} =$$

$$= -4 \sin \frac{2\pi}{3} = -2\sqrt{3}.$$

180. Să se studieze derivabilitatea funcției

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-2}}, & x \in (-\infty, 2), \\ 0, & x = 2, \\ \ln(x^2 - 4x + 5), & x \in (2, \infty). \end{cases}$$

R. Funcția este derivabilă în orice punct al dreptei reale $x \neq 2$ și derivata sa $f'(x)$ este dată de

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-2)^2} e^{\frac{1}{x-2}}, & x \in (-\infty, +2) \\ \dfrac{2x-4}{x^2-4x+5}, & x \in (2, \infty) \end{cases}$$

În punctul $x = 2$, calculăm derivatele laterale. Avem

$$f'_d(2) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{\ln[1 + (x-2)^2]}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \ln\{[1 + (x-2)^2]^{\frac{1}{(x-2)^2}}\}^{(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} (x-2) = 0;$$

$$f'_s(2) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x-2} = 0.$$

Deci $f'(2) = 0$, de unde rezultă că funcția este derivabilă pentru orice $x \in R$.

181. Să se arate că funcția

$f(x) = x^n[A \cos(\ln x) + B \sin(\ln x)]$, $x > 0$, A și B fiind constante, verifică ecuația

$$x^2 f''(x) + (1 - 2n)\, x f'(x) + (1 + n^2)\, f(x) = 0.$$

R. $f'(x) = nx^{n-1}[A \cos(\ln x) + B \sin(\ln x)] + x^{n-1}[-A \sin(\ln x) + B \cos(\ln x)]$.

$$\begin{aligned} f''(x) = {} & n(n-1)\, x^{n-2}[A \cos(\ln x) + B \sin(\ln x)] + \\ & + nx^{n-2}[-A \sin(\ln x) + B \cos(\ln x)] + \\ & + (n-1)\, x^{n-2}[-A \sin(\ln x) + B \cos(\ln x)] + \\ & + x^{n-2}[-A \cos(\ln x) - B \sin(\ln x)]. \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuație, aceasta este verificată identic.

182. Să se determine condițiile în care funcția

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

este:

a) continuă în $x = 0$,

b) derivabilă în $x = 0$,

c) cu derivată continuă în $x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Trebuie ca $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Avem $\left|x^n \sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|^n$ şi $\lim\limits_{x\to 0}|x|^n = 0$, dacă $n > 0$. Atunci şi $\lim\limits_{x\to 0} x^n \sin\frac{1}{x} = 0$ pentru $n > 0$ şi deci în acest caz funcţia este continuă în punctul $x = 0$.

b) Pentru ca funcţia $f(x)$ să fie derivabilă în $x = 0$, trebuie ca $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x}$ să existe şi să fie finită.

Dar $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x^{n-1}\sin\frac{1}{x}$ şi $\left|x^{n-1}\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x^{n-1}|$ rezultă că pentru $n > 1$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ şi deci pentru $n > 1$ funcţia este derivabilă.

c) Calculăm derivata

$$f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - x^{n-2}\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \quad n > 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Pentru ca derivata să fie continuă în punctul $x = 0$ trebuie ca $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$

Avem $\lim\limits_{x\to 0} nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} = 0$ dacă $n > 1$ şi

$\lim\limits_{x\to 0} x^{n-2}\cos\frac{1}{x} = 0$ dacă $n > 2$.

Rezultă deci că dacă $n > 2$ $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$ şi deci $f'(x)$ este continuă în $x = 0$.

183. Să se calculeze derivatele de ordinele indicate pentru funcţiile următoare:

a) $y = x^{\ln x^{\ln\ln x}}$, $x > 1$, derivata de ordinul I.

b) $y = x^2 \sin 2x$, $x \in \mathbf{R}$, derivata de ordin 30.

c) $y = x^4 e^{ax}, x$, $a \in \mathbf{R}$ derivata de ordin 10.

d) $y = \sin^2 x \cdot \ln x$, $x > 0$ derivata de ordin 6.

e) $y = \frac{x}{x+a}$, $a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R} - \{-a\}$ derivata de ordinul n.

f) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, $x \neq 1, x \neq 2$, derivata de ordinul n.

R. a) $y = x^{\ln x^{\ln\ln x}} = x^{(\ln\ln x)\cdot(\ln x)}$.

Notăm $u = \ln x$, $v = \ln(\ln x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Logaritmăm, apoi derivăm; rezultă

$$\ln y = (uv)\ln x, \quad y' = y(u'v + v'u)\ln x + \frac{uv}{x},$$

$$u'v + v'u = \frac{\ln \ln x}{x} + \ln x \cdot \frac{1}{x \ln x} = \frac{1}{x}(\ln \ln x + 1), \quad \text{de unde}$$

$$y' = x^{(\ln \ln x)\ln x}\left[\frac{\ln x}{x}(\ln \cdot \ln x + 1) + \frac{(\ln \ln x)\cdot \ln x}{x}\right] =$$

$$= x^{\ln x^{\ln \ln x}} \cdot \frac{\ln x}{x}[2 \ln \ln x + 1].$$

b) Aplicăm formula lui Leibniz

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Notăm $u = x^2, \quad v = \sin 2x, \quad n = 30.$

Avem $u' = 2x, \quad u'' = 2, \quad u''' = u^{IV} = \ldots = u^{(30)} = 0.$

$$v' = 2\cos 2x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right),$$

$$v'' = 2^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 2^2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2x\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v^{(28)} = 2^{28} \sin\left(28 \cdot \frac{\pi}{2} + 2x\right) = 2^{28} \sin 2x,$$

$$v^{(29)} = 2^{29} \sin\left(29 \cdot \frac{\pi}{2} + 2x\right) = 2^{29} \cos 2x,$$

$$v^{(30)} = 2^{30} \sin\left(30 \cdot \frac{\pi}{2} + 2x\right) = -2^{30} \sin 2x.$$

De unde

$$y^{(30)} = -2^{30} x^2 \sin 2x + C_{30}^1 2^{29} \cdot 2x \cos 2x + C_{30}^2 \cdot 2^{28} \cdot 2 \sin 2x,$$

sau

$$y^{(30)} = -2^{30} x^2 \sin 2x + 30 \cdot 2^{30} x \cos 2x + 435 \cdot 2^{29} \sin 2x.$$

c) $y^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k u^{(k)} \cdot v^{(10-k)}$

$u = x^4, \quad v = e^{ax}$

$u' = 4x^3, \quad u'' = 4 \cdot 3x^2, \quad u''' = 4 \cdot 3 \cdot 2x, \quad u^{IV} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$

$u^{(5)} = u^{(6)} = \ldots = u^{(10)} = 0.$

$v' = ae^{ax}, \quad v'' = a^2 e^{ax}, \ldots, v^{(6)} = a^6 e^{ax}, \quad v^{(7)} = a^7 e^{ax}$

Scanned with OKEN Scanner

$v^{(8)} = a^8 e^{ax}, \quad v^{(9)} = a^9 e^{ax}, \quad v^{(10)} = a^{10} e^{ax}$

$y^{(10)} = a^{10}x^4 e^{ax} + C_{10}^1 4x^3 a^9 e^{ax} + C_{10}^2 4 \cdot 3x^2 a^8 e^{ax} + C_{10}^3 4 \cdot 3 \cdot 2xa^7 e^{ax} +$
$+ C_{10}^4 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\, a^6 e^{ax} = a^6 e^{ax}[a^4x^4 + 40a^3x^3 + 540a^2x^2 +$
$+ 1880ax + 5040].$

d) Avem $y = \frac{1 - \cos 2x}{2} \ln x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \ln x,$

$y^{(6)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{6} C_6^k u^{(k)} v^{(10-k)},$

$u = \ln x, \qquad v = 1 - \cos 2x,$

$u' = \frac{1}{x}, \quad u'' = -\frac{1}{x^2}, \quad u''' = \frac{2}{x^3}, \quad u^{(4)} = -\frac{6}{x^4}, \quad u^{(5)} = \frac{24}{x^5}, \quad u^{(6)} = -\frac{120}{x^6},$

$v' = 2 \sin 2x, \quad v'' = 2^2 \cos 2x, \quad v''' = -2^3 \sin 2x,$

$v^{(4)} = -2^4 \cos 2x, \quad v^{(5)} = 2^5 \sin 2x, \quad v^{(6)} = 2^6 \cos 2x.$

Înlocuind obținem

$$y^{(6)} = -\frac{60}{x^6} + \left(\frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^3} + \frac{96}{x}\right) \sin 2x + \left(\frac{60}{x^6} - \frac{180}{x^4} + \frac{120}{x^2} - 32 \ln x\right) \cos 2x.$$

e) $y = \frac{x}{x+a} = 1 - \frac{a}{x+a}, \quad x \neq -a,$

$$y' = \frac{a}{(x+a)^2}, \quad y'' = -1 \cdot 2 \frac{a}{(x+a)^3}, \quad y''' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \frac{a}{(x+a)^4}.$$

Demonstrăm, folosind metoda inducției, că

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{a \cdot n!}{(x+a)^{n+1}}.$$

Pentru $n = 1$ se verifică ușor că formula este adevărată.

Presupunem că $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{a \cdot n!}{(x+a)^{n+1}}$ și derivînd încă o dată avem,

$$y^{(n+1)} = y^{(n)'} = -(-1)^{n-1} \frac{an!\,(n+1)}{(x+a)^{n+2}} = (-1)^n \frac{a(n+1)!}{(x+a)^{n+2}},$$

ceea ce demonstrează afirmația.

f) Putem scrie $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}, \quad x \neq 1$ și $x \neq 2.$

Vom folosi aceeași metodă ca la exercițiul (e)

$$y' = -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}, \qquad y'' = \frac{1 \cdot 2}{(x-2)^3} - \frac{1 \cdot 2}{(x-1)^3}$$

și aplicînd metoda inducției rezultă

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

184. Să se calculeze $f^{(n)}(0)$ dacă

$f(x) = (\arcsin x)^2, \quad x \in (-1, +1).$

R. $f'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{1-x^2} - \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

sau

$$(1-x^2) f''(x) + x f'(x) - 2 = 0.$$

Derivăm de n ori această relaţie, după formula lui Leibniz. Obţinem

$$(1-x^2) f^{(n+2)}(x) - (2n-1) x f^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0.$$

De aici rezultă pentru $x = 0$

$$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0).$$

Prin recurenţă rezultă

$$f^{(2k)} = 2^{2k-1}[(k-1)!]^2, \quad f^{(2k-1)}(0) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

185. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcţiei

$$\varphi(x) = f(x^2), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

R. Calculăm derivatele succesive:

$\varphi'(x) = 2x f'(x^2),$

$\varphi''(x) = 4x^2 f''(x^2) + 2f'(x^2),$

$\varphi'''(x) = (2x)^3 f'''(x) + \frac{3 \cdot 2}{1!}(2x) f''(x^2).$

Se arată, folosind metoda inducţiei, că:

$$\varphi^{(n)}(x) = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x) + \ldots$$

186. Să se discute, folosind teorema lui Rolle, după valorile parametrului $m \in \mathbf{R}$, rădăcinile reale ale ecuaţiilor:

a) $6x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 6x + m + 1 = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad m \in \mathbf{R}.$

b) $3x^2 - x - \ln x + m = 0, \qquad x > 0, \quad m \in \mathbf{R}.$

R. Notăm $f(x) = 6x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 6x + m + 1$. Avem

$f'(x) = 24x^3 - 24x^2 - 6x + 6,$

$f'(x) = 0$ are rădăcinile $x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1,$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = m - \frac{11}{8}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = m + \frac{21}{8}, \quad f(1) = m + 2.$

Scanned with OKEN Scanner

Formăm şirul lui Rolle

m \ $f(x)$	$f(-\infty)$	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = m - \frac{11}{8}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = m + \frac{21}{8}$	$f(1) = m + 2$	$f(+\infty)$	Discuţie
$-\infty$	+	−	−	−	+	2 rădăcini reale simple
$-\frac{21}{8}$	+	−	0	−	+	2 simple, una dublă $= \frac{1}{2}$
	+	−	+	−	+	4 simple
-2	+	−	+	0	+	2 simple, una dublă $= 1$
	+	−	+	+	+	2 simple
$\frac{11}{8}$	+	0	+	+	+	una dublă $= -\frac{1}{2}$
$+\infty$	+	+	+	+	+	nici o rădăcină reală

b) Notăm $g(x) = 3x^2 - x - \ln x + m, \quad x > 0.$

$$g'(x) = 6x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{6x^2 - x - 1}{x},$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Formăm şirul lui Rolle

m \ $g(x)$	$g(0+0)$	$g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 + m - \frac{1}{4}$	$g(+\infty)$	Discuţie
$-\infty$	+	−	+	2 rădăcini reale simple
$\frac{1}{4} - \ln 2$	+	0	+	o rădăcină dublă $= \frac{1}{2}$
$+\infty$	+	+	+	nici o rădăcină reală

187. Să se demonstreze următoarele inegalităţi:

a) $e^x > 1 + x, \quad x \neq 0.$

b) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x, \quad x > 0.$

c) $\ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} x \leqslant \ln 2 - \frac{\pi}{4}, \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right];$

d) $\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b \leqslant |a - b|.$

R. a) Notăm $f(x) = e^x - 1 - x$. Calculăm derivata întîi, $f'(x) = e^x - 1$. Deoarece $f'(x) < 0$ pentru $x < 0$ funcţia $f(x)$ este descrescătoare pentru $x \in (-\infty, 0)$. Dar $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$, de unde rezultă $f(x) > 0$ pentru $x < 0$.

Scanned with OKEN Scanner

În mod asemănător, deoarece $f'(x) > 0$ pentru $x > 0$, $f(x)$ este crescătoare și pentru că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$, rezultă că $f(x) > 0$ pentru $x > 0$.

b) 1) Notăm $h(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x)$. Avem $h'(x) = -\frac{x^2}{1 + x}$, $h'(x) < 0$, $x > 0$, deci $h(x)$ este descrescătoare pentru $x > 0$ și deoarece $h(0 + 0) = 0$, rezultă $h(x) < 0$, adică $x - \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x) < 0$ sau $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x)$.

2) Notăm $g(x) = \ln(1 + x) - x$, $g'(x) = -\frac{x}{1 + x} < 0$, $x > 0$, deci $g(x)$ este descrescătoare pentru $x > 0$ și deoarece $g(0 + 0) = 0$, rezultă $g(x) < 0$, adică $\ln(1 + x) < x$ pentru $x > 0$.

Din ultimile inegalități stabilite la punctele b) (1) și b) (2) rezultă inegalitățile cerute.

c) Notăm $f(x) = \ln(1 + x^2)$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ verifică pe intervalul $[x, 1]$ condițiile teoremei lui Cauchy.

Într-adevăr,

1) $f(x)$ și $g(x)$ sînt continue pe $[x, 1]$ cu $\frac{1}{2} \leqslant x$.

2) $f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$, $g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ există pe intervalul $(x, 1)$.

3) $g'(x) \neq 0$ pe intervalul $(x, 1)$ $\left(\text{cu } \frac{1}{2} \leqslant x\right)$.

Aplicînd teorema lui Cauchy, rezultă:

$$\frac{f(x) - f(1)}{g(x) - g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{unde} \quad \frac{1}{2} \leqslant x < \xi < 1$$

sau $\frac{\ln(1 + x^2) - \ln 2}{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}} = 2\xi \geqslant 1.$

Dar $\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4} < 0$ pentru $0 < x < 1$, de unde rezultă $\ln(1 + x^2) - \ln 2 \leqslant \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}$ care este echivalentă cu inegalitatea

$$\ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} x \leqslant \ln 2 - \frac{\pi}{4}.$$

d) Notăm $f(x) = \operatorname{arctg} x$ și aplicăm teorema lui Lagrange pe $[a, b]$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \text{cu} \quad \xi \in (a, b),$$

sau $|\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a| = \frac{1}{1 + \xi^2}|b - a| \leqslant |b - a|,$

deoarece $\frac{1}{1 + \xi^2} \leqslant 1.$

Scanned with OKEN Scanner

188. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$,

b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin m(x-\pi)}{\sin n(x-\pi)}$, $m,\ n\in\mathbf{R}$.

R. a) Trecînd la limită obținem nedeterminarea $\dfrac{0}{0}$. Vom verifica dacă este posibilă aplicarea regulii lui l'Hospital:

Notăm $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $g(x) = x - \sin x$.

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

2) $f(x)$ și $g(x)$ sînt derivabile pentru $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ și $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$, $g'(x) = 1 - \cos x$.

3) $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $x \neq 0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x(1-\cos x)} = 2.$$

De aici rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = 2$.

b) Considerăm $f(x) = \sin m(x-\pi)$, $g(x) = \sin n(x-\pi)$.

Avem $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi} g(x) = 0$, nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$.

Condițiile pentru aplicarea regulei din l'Hospital sînt satisfăcute.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin m(x-\pi)}{\sin n(x-\pi)} = \lim_{x\to\pi}\frac{m\cos m(x-\pi)}{n\cos n(x-\pi)} = \frac{m}{n}.$$

189. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$,

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n - 1 - n(x-1)}{(x-1)^2}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{3x^2\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{1-4x^2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{3x^2}$$

deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-4x^2}=1$.

Obținem din nou nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$.

Aplicînd încă o dată regula lui l'Hospital (se verifică ușor acest lucru) avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}}{6x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{6}=1.$$

b) Sîntem în cazul $\frac{0}{0}$. Aplicînd succesiv regula lui l'Hospital avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x+1-e^x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

c) Cazul $\frac{0}{0}$. Aplicînd de două ori succesiv regula lui l'Hospital

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1-n(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n-1}-n}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{n(n-1)\,x^{n-2}}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

d) Sîntem în cazul $\frac{0}{0}$. Aplicăm regula lui l'Hospital de două ori și avem:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^x\ln x+x^x-1}{\frac{1}{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}}=-2.$$

190. Să se calculeze următoarele limite

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$,

b) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$, $n\in\mathbf{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

R. a) Sîntem în cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$.

Notăm $f(x) = \ln(2 + e^{3x})$, $g(x) = \ln(3 + e^{2x})$.

Avem

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$.

2) f și g sînt derivabile pentru orice $x\in\mathbf{R}$

și $f'(x) = \frac{3e^{3x}}{2 + e^{3x}}$, $g'(x) = \frac{2e^{2x}}{3 + e^{2x}} \neq 0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}(3 + e^{2x})}{2e^{2x}(2 + e^{3x})} = \frac{3}{2}.$$

Deci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})} = \frac{3}{2}$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} 3x = +\infty$. Sîntem în cazul $\frac{\infty}{\infty}$.

Aplicăm regula lui l'Hospital:

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{1}{3} \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{-6 \sin 3x \cos 3x}{-2 \sin x \cos x} = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos 3x}{\cos x} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{-3 \sin 3x}{-\sin x} = 3.$$

c) Sîntem în cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicînd regula lui l'Hospital de n ori avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

191. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$.

R. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{ctg} x = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$.

Sîntem în cazul de nedeterminare $\infty - \infty$ (sau $-\infty + \infty$)

În ambele cazuri putem scrie

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x}$ care ne conduce la o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd regula lui l'Hospital obținem

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{ctg}x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=0.$$

b) Nedeterminare de forma $\infty-\infty$. Putem scrie

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$ și obținem nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$.

Aplicînd regula lui l'Hospital avem

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+\ln x-1}{1-\frac{1}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

192. Să se calculeze limitele următoare

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{ch}x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$, d) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, $a,\ b>0$.

R. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$, avem nedeterminare de forma 1^∞.

Notăm $y=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. Logaritmînd avem

$\ln y=\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arcsin x}{x}$ și obținem nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$.

Aplicînd regula lui l'Hospital rezultă

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}-\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{2x^2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}{4x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+2x^2-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{4(1-x^2)\arcsin x+2x\sqrt{1-x^2}-2x^2\arcsin x}=\frac{1}{6},$$

de unde, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{6}}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x}{\cos x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Avem nedeterminare de forma 1^∞. Notăm $y = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\cos x}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$.

Rezultă

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\operatorname{ch} x}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = 1,$$

de unde $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{ch} x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e$.

c) Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} = 1$, sîntem în cazul de nedeterminare 1^∞. Logaritmînd, avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = -\frac{1}{2}, \quad \text{deci} \quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

d) Sîntem în cazul nedeterminării de forma 1^∞. Avem

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\pi x}{2}}} = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}}{x^2}}$.

Calculăm

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a^x\ln a - \ln a}{a^x - x\ln a} - \frac{b^x\ln b - \ln b}{b^x - x\ln b}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{a^x - x\ln a}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a - \ln a}{2x} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{b^x - x\ln b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{b^x\ln b - \ln b}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln a(a^x - 1)}{2x} - \lim_{x\to 0}\frac{\ln b\cdot(b^x - 1)}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x\ln^2 a}{2} - \frac{b^x\ln b}{2}\right) =$$

$$= \frac{\ln^2 a - \ln^2 b}{2} = \frac{(\ln a - \ln b)(\ln a + \ln b)}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}\ln ab}$.

193. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}, \quad a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n > 0.$$

R. Notăm $y = \left[\dfrac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}$. Logaritmăm și aplicăm regula lui l'Hospital $\left(\text{Cazul } \dfrac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1 + a_2^x\ln a_2 + \ldots + a_n^x\ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x} =$$

$$= \frac{\ln a_1a_2\ldots a_n}{n} = \ln\sqrt[n]{a_1\ a_2\ \ldots\ a_n}.$$

Deci $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{a_1a_2\ \ldots\ a_n}$.

194. Să se calculeze limita

$$\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

R. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1} = +\infty$ sîntem în cazul de nedeterminare de forma ∞^0. Notăm $y = \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$. Avem

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}}{x} \quad \left(\text{cazul } \frac{\infty}{\infty}\right).$$

Aplicăm regula lui l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\pi}{(2x+1)^2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi x}{2x+1}}}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}} = 0$$

deci $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

17. Să se calculeze limita

$$\lim_{x\to 0+} x^x.$$

R. Sîntem în cazul nedeterminării de forma 0°. Avem

$$\lim_{x\to 0+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$$

195. Să se găsească dezvoltarea Mac-Laurin pentru funcția $f(x) = \sqrt{ax+b}$, $ax+b>0$, $b>0$.

R. Avem $f(x) = \sqrt{b}\left(1+\frac{a}{b}x\right)^{\frac{1}{2}}$ și aplicînd formula binomială

$$(1+x)^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

rezultă

$$\sqrt{ax+b} = \sqrt{b}\left[1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}\frac{a}{b}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{a}{b}x\right)^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{a}{b}x\right)^n R_n(x)\right]$$

sau $\sqrt{ax+b} = \sqrt{b}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{a}{b}x - \frac{1}{2^2\cdot 2!}\left(\frac{a}{b}\right)^2 x^2 + \ldots + \right.$

$$\left. + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\left(\frac{a}{b}\right)^n x^n + R_n(x)\right].$$

196. Folosind formula

$$f(x) - f(x_0) \simeq (x-x_0)\,f'(x_0)$$

să se calculeze valorile aproximative

a) $\sqrt[3]{30}$, b) $\sin 18^\circ$.

R. Considerăm funcția $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \neq 0$.

Avem $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0} \simeq (x-x_0)\frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$, rezultă, luînd $x=30$, $x_0=27$,

$$\sqrt[3]{30} \simeq \sqrt[3]{27} + (30-27)\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = 3 + \frac{1}{9} \simeq 3 + 0{,}11 = 3{,}11.$$

b) $\sin x \simeq \sin x_0 + (x-x_0)\cos x_0$

Luăm $x = 18^\circ$, $x_0 = 60^\circ$,

$$\sin 18^\circ \simeq \sin 60^\circ - \frac{13\pi}{45}\cos 60^\circ \simeq 0{,}309017.$$

Scanned with OKEN Scanner

197. Folosind formula lui Taylor cu restul de ordinul doi, să se calculeze valoarea aproximativă pentru $\sqrt[4]{260}$ evaluînd și eroarea făcută.

R. Considerăm funcția $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Formula lui Taylor cu restul de ordinul doi

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(\xi),$$

$$\text{cu } x_0 < \xi < x.$$

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, \quad f''(x) = -\frac{3}{4^2}\frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}, \quad f''(x) = \frac{3}{4^2}\frac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}}.$$

Luăm $x = 260, \quad x_0 = 256.$

$$f(256) = 4; \quad f'(256) = \frac{1}{4^4}; \quad f''(256) = -\frac{3}{4^9}.$$

Deci

$$\sqrt[4]{260} = 4 + \frac{4}{1!}\frac{1}{4^4} - \frac{4^2}{2!}\cdot\frac{3}{4^9} + \frac{4^3}{3!} f'''(\xi), \quad 256 < \xi < 260.$$

Avem $\sqrt[4]{260} \simeq 4 + 0{,}15625 - 0{,}000009 \simeq 4{,}156241.$

Eroarea comisă este dată de

$$|R_3(x)| = \left|\frac{4^3}{3!}\cdot\frac{3\cdot 7}{4^3}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\xi^{11}}}\right| < \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{(256)^{11}}} < \frac{1}{10^6}.$$

198. Folosind formula lui Taylor să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$, d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$.

R. a) Folosim formula lui Taylor în punctul $x = 0$ (formula lui Mac-Laurin)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(\theta x), \quad 0 < \theta < 1$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3x^4}{4!} + R_4^*(\theta x), \quad 0 < \theta < 1$$

unde $\dfrac{R_4(\theta x)}{x^4} \to 0, \quad \dfrac{R^*(\theta x)}{x^4} \to 0$ cînd $x \to 0.$

Înlocuind, avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(\theta x) - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - R_4^*(\theta x)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Scriem pentru $e^x \sin x$ formula lui Taylor cu restul de ordin 3. Avem

$$e^x \sin x = x + x^2 - \frac{x^3}{3!} + R_3(\theta x), \quad 0 < \theta < 1,$$

unde $\lim\limits_{x\to 0} \frac{R_3(\theta x)}{x^3} = 0.$

Deci

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 - \frac{x^3}{3!} + R_3(\theta x) - x - x^2}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{y\to 0} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\ln(1+y)\right] = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y - \ln(1+y)}{y^2} =$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y - \left[y - \frac{y^2}{2} + R_2(\theta y)\right]}{y^2} = \frac{1}{2}, \quad \text{deoarece} \quad \frac{R^2(\theta y)}{y^2} \to 0 \quad \text{cînd} \quad y \to 0.$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - y^5}) = \lim\limits_{\substack{y\to 0 \\ y>0}} \frac{\sqrt[6]{1+y} - \sqrt[6]{1-y}}{y}.$

Dar

$$\sqrt[6]{1+y} = 1 + \frac{1}{6}y + R_1(\theta y) \quad \text{și}$$

$$\sqrt[6]{1-y} = 1 - \frac{1}{6}y + R_1^*(\theta y), \quad \text{cu} \quad 0 < \theta < 1,$$

unde $\frac{R_1(\theta y)}{y} \to 0 \quad \frac{R_1^*(\theta y)}{y} \to 0$ cînd $y \to 0.$

Deci $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}) = \lim\limits_{\substack{y\to 0 \\ y>0}} \frac{\sqrt[6]{1+y} - \sqrt[6]{1-y}}{y} =$

$$= \lim_{\substack{y\to 0 \\ y>0}} \frac{1 + \frac{1}{6}y + R_1(\theta y) - 1 + \frac{1}{6}y - R_1^*(\theta y)}{y} = \frac{1}{3}.$$

199. Să se determine valorile extreme ale funcțiilor

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4, \quad x \in \mathbf{R},$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}, \quad x \neq 1,$

c) $f(x) = xe^{-x}, \quad x \in \mathbf{R}.$

R. a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

Valorile extreme rezultă din tabloul:

x	$-\infty$		1			3			$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		0			-4			$+\infty$
			M(maxim)			m (minim)			

Scanned with OKEN Scanner

b) $f'(x) = \frac{5x-7}{(x+1)^3}$, $f'(x) = 0$, $x = \frac{7}{5}$.

Pentru $x = \frac{7}{5}$, $f\left(\frac{7}{5}\right) = -\frac{1}{24}$ minim.

c) $f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0$, $x = 1$, $f(1) = \frac{1}{e}$ maxim.

200. Să se determine valorile extreme ale funcțiilor

a) $f(x) = \frac{(1-x)^{x-1}}{x^x}$, $0 < x < 1$,

b) $f(x) = \sin x e^{\cos^2 x}$ $x \in [0, 2\pi]$

R. a) $f'(x) = \frac{(1-x)^{x-1} x^x [\ln(1-x) - \ln x]}{x^{2x}} = \frac{(1-x)^{x-1} \ln \frac{1-x}{x}}{x^x}$

$f'(x) = 0$, $\ln(1-x) - \ln x = 0$ sau $1 - x = x$, $x = \frac{1}{2}$,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2.$$

Deoarece pentru $0 < x < \frac{1}{2}$, $f'(x) > 0$ iar pentru $\frac{1}{2} < x < 1$, $f'(x) < 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ este maxim.

b) $f'(x) = \cos x e^{\cos^2 x} - 2\sin^2 x \cos x e^{\cos^2 x} = \cos x e^{\cos^2 x}(1 - 2\sin^2 x)$

$f'(x) = 0$ dacă $\cos x = 0$ sau $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$,

adică $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, $x_3 = \frac{\pi}{4}$, $x_4 = \frac{3\pi}{4}$, $x_5 = \frac{5\pi}{4}$, $x_6 = \frac{7\pi}{4}$.

Pentru a stabili natura punctului de extrem, vom calcula $f''(x)$ $f''(x) = -\sin x e^{\cos^2 x}(\sin^2 2x - 4\cos^2 x - 1)$.

Rezultă

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \text{minim};$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, \quad \text{maxim};$$

$$x_3 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = +\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}, \quad \text{minim};$$

$$x_4 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}, \quad \text{maxim}$$

$$x_5 = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow f''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}, \quad \text{maxim}.$$

Scanned with OKEN Scanner

201. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1$ dacă $0 \leqslant x \leqslant 1$ și $p > 1$.

b) $x^m(q-x)^n \leqslant \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} q^{m+n}$, $m, n > 0$, $0 \leqslant x \leqslant q$.

R. Notăm $f(x) = x^p + (1-x)^p$. Calculăm derivata

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1} = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}], \quad x \in (0, 1)$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{dacă} \quad x = \frac{1}{2}.$$

Avem $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$.

Calculăm derivata a doua

$$f''(x) = p(p-1)[x^{p-2} + (1-x)^{p-2}],$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = p(p-1) \cdot \frac{1}{2^{p-3}} > 0.$$

Deci pentru $x = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$ este minim.

Deci $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant f(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

Deoarece pentru $x > \frac{1}{2}$ $f'(x) > 0$ rezultă că pe intervalul $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ funcția $f(x)$ este crescătoare, deci $f(x) \leqslant f(1) = 1$, de unde $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant f(x) \leqslant 1$, pentru orice $x \in [0, 1]$ și $p > 1$.

b) Notăm $g(x) = x^m(q-x)^n$. Avem

$$g'(x) = mx^{m-1}(q-x)^n - nx^m(q-x)^{n-1} = x^{m-1}(q-x)^{n-1}[m(q-x) - nx] =$$

$$= x^{m-1}(q-x)^{n-1}[mq - (m+n)x], \quad x \in (0, q).$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{mq}{m+n}.$$

Dacă $x < \frac{mq}{m+n}$, atunci $f'(x) > 0$ funcția $f(x)$ *crescătoare.*

Dacă $x > \frac{mq}{m+n}$, atunci $f'(x) < 0$ funcția $f(x)$ *descrescătoare.*

Deci pentru $x = \frac{mq}{m+n}$, $f\left(\frac{mq}{m+n}\right) = \left(\frac{mq}{m+n}\right)^m \left(q - \frac{mq}{m+n}\right)^n = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} q^{m+n}$ este maxim și deci

$$f(x) \leqslant f\left(\frac{mq}{m+n}\right) \quad \text{sau} \quad x^m(q-x)^n \leqslant \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} q^{m+n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

202. Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}, \quad 3 + x \neq 0, \quad x(3+x) \geqslant 0.$$

R. Domeniul de definiție al funcției este $(-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \simeq 4{,}30$$

$$f(0) = 1.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - x + |x|\sqrt{\frac{x}{x+3}}\right) = +\infty$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x+3}}\right) = -2$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}\right) = 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - x^2}{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x\right)} = \frac{5}{2}.$$

Deci $y = \frac{5}{2} - 2x$ asimptotă oblică pentru $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x) = -\infty$, deci $x = -3 - 0$ asimptotă verticală.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - x + x\sqrt{\frac{x}{x+3}}\right) = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{x(x+3)\left(\sqrt{\frac{x}{x+3}} + 1\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Deci $y = -\frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală pentru $x \to +\infty$. Derivata I este

$$f'(x) = -1 + \frac{x^2(2x+3)}{2\sqrt{x^3(x+3)^3}}, \quad x \neq -3, \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \quad x = -4, \quad f(-4) = 13.$$

$$\lim_{x\to0+} f'(x) = -1$$

Tabloul de variație este

x	$-\infty$			-4		-3		$\frac{5+\sqrt{13}}{2}$				$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	-1	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		13	$\nearrow$	$+\infty$		1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$
				m								

Grafic (fig. 11)

Scanned with OKEN Scanner

203. Să se discute grafic ecuaţia:

$$\frac{1}{x-2}e^{\frac{2-x}{2+x}}=\lambda,\quad x\in\mathbf{R}-\{-2,2\},\quad \lambda\in\mathbf{R}.$$

R. Reprezentăm grafic pe $f(x)=\frac{1}{x-2}e^{\frac{2-x}{2+x}}$ şi apoi intersectăm acest grafic cu graficul funcţiei $g(x)=\lambda$.

Domeniul de definiţie al funcţiei $f(x)=\frac{1}{x-2}e^{\frac{2-x}{2+x}}$ este

$$(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty).$$

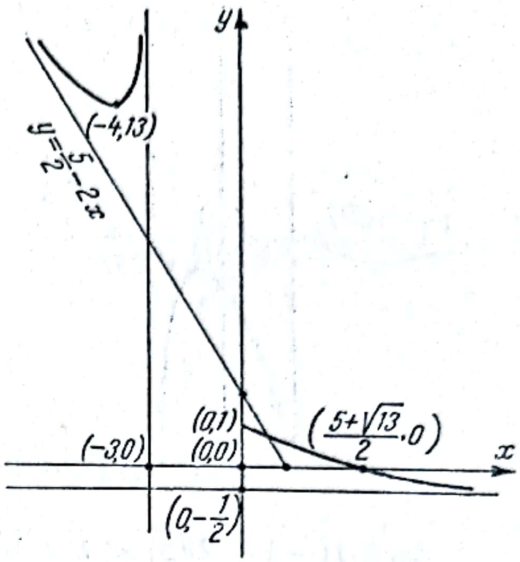

Fig. 11

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\frac{1}{x-2}e^{\frac{2-x}{2+x}}=0,\qquad \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\frac{1}{x-2}e^{\frac{2-x}{2+x}}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{1}{x+2}e^{\frac{2-x}{2+x}}=-\infty,\qquad \lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{1}{x-2}e^{\frac{2-x}{2+x}}=+\infty$$

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}e^{\frac{2-x}{2+x}}-\frac{1}{x-2}\cdot\frac{4}{(2+x)^2}e^{\frac{2-x}{2+x}},\quad x\neq-2,\quad x\neq2;$$

$$f'(x)=-\frac{e^{\frac{2-x}{2+x}}}{(x-2)^2(x+2)^2}(x^2+8x-4).$$

$$f'(x)=0\to x_1=-4+2\sqrt{5},\quad x_2=-4-2\sqrt{5}$$

$$f(-4-2\sqrt{5})\simeq-0{,}12,\qquad f(-4+2\sqrt{5})\simeq-0{,}15.$$

Tabloul de variaţie este

x	$-\infty$		-4		-25		-2		$-4+25$		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0		$+$		$+$		0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	$\simeq-0{,}12$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$\simeq-0{,}15$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	0
			m						M				

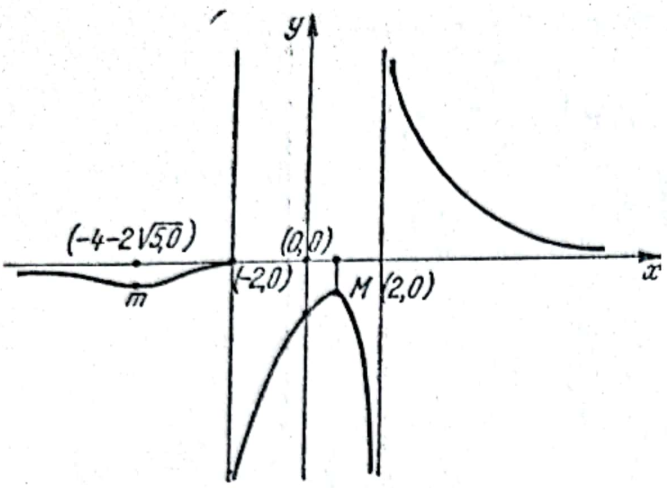

Fig. 12

Intersectăm graficele curbelor $y = f(x)$ și $y = \lambda$. Obținem:

Dacă $\lambda < -f(-4 + 2\sqrt{5})$ ecuația are două rădăcini reale,

dacă $\lambda = f(-4 + 2\sqrt{5})$ ecuația are o rădăcină dublă $-4 + 2\sqrt{5}$,

dacă $f(-4 + 2\sqrt{5}) < \lambda < f(-4 - 2\sqrt{5})$ ecuația nu admite nici o rădăcină reală,

dacă $\lambda = f(-4 - 2\sqrt{5})$ ecuația admite o rădăcină dublă $-4 - 2\sqrt{5}$,

dacă $f(-4 - 2\sqrt{5}) < \lambda < 0$ ecuația admite două rădăcini reale,

dacă $\lambda > 0$ ecuația admite o singură rădăcină reală.

204. Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = |x|\, e^{-|x-1|}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

R. Ținînd seama de definiția modulului, funcția dată se poate scrie:

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{x-1}, & x \leqslant 0, \\ xe^{x-1}, & 0 < x < 1, \\ xe^{1-x}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Funcția este deci definită pentru $x \in (-\infty, +\infty)$ și este continuă pe tot domeniul de definiție.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{e^{1-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{-e^{1-x}} = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0.$$

Deci $y = 0$ este asimptotă orizontală.

Calculăm derivata I

$$f'(x) = \begin{cases} -(1 + x)\, e^{x-1}, & x < 0, \\ (1 + x)\, e^{x-1}, & 0 < x < 1, \\ (1 - x)\, e^{1-x}, & x > 1. \end{cases}$$

În punctele $x = 0$ și $x = 1$ calculăm derivata plecînd de la definiție

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-xe^{x-1}}{x} = -\frac{1}{e}$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{xe^{x-1}}{x} = \frac{1}{e}$$

$$f'_s(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{xe^{x-1}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x(e^{x-1}-1)+x-1}{x-1} = 1 + \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x\frac{e^{x-1}-1}{x-1} = 2,$$

deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} = 1,$

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{xe^{1-x}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x(e^{1-x}-1)+x-1}{x-1} = 1 + \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x\frac{e^{1-x}-1}{x-1} = 0,$$

căci $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{e^{1-x}-1}{1-x} = 1.$

Deci domeniul în care funcția este derivabilă este

$$(-\infty, 0)\cup(0, 1)\cup(1, +\infty)$$

$$f'(x) = 0, \quad \text{pentru} \quad x = -1$$

Calculăm derivata II

$$f''(x) = \begin{cases} -(2+x)\,e^{x-1}, & x < 0 \\ (2+x)\,e^{x-1}, & 0 < x < 1 \\ (x-2)\,e^{1-x}, & x > 1. \end{cases}$$

$f''(x) = 0$, pentru $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{e}$	$+$	$+$	$+$	2	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	0	$+$ $+$ $+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-3}$	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$2e^{-1}$	$\searrow$	0
			i		M		m		M		i		

Funcția are graficul (fig. 13).

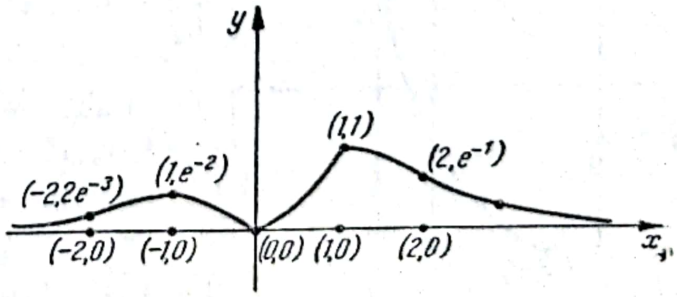

Fig. 13

205. Să se discute după valorile parametrului m numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$x + 2 - \sqrt{-3x^2 - 6x + 9} = m(m-4)$$

R. Folosim metoda grafică.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm $f(x) = x + 2 - \sqrt{-3x^2 - 6x + 9}$, $-3x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$

și $g(x) = m(m - 2)$

Reprezentăm grafic funcția $f(x)$.

Domeniul de definiție este dat de $-3x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$ sau $x \in [-3, 1]$.

Intersecția cu axele de coordonate

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = -1$$

$$f(x) = 0, \Rightarrow x + 2 - \sqrt{-3x^2 - 6x + 9} = 0,$$

sau $(x + 2)^2 = -3x^2 - 6x + 9$. De unde

$$4x^2 + 10x - 5 = 0, \quad x_1 = \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{4}, \quad x_2 = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{4}$$

Numai $x_2 = \frac{3\sqrt{5} - 5}{4}$ verifică ecuația $f(x) = 0$.

Derivata de ordin I este

$$f'(x) = 1 + \frac{3(x + 1)}{\sqrt{-3x^2 - 6x + 9}} = \frac{3(x + 1) + \sqrt{-3x^2 - 6x + 9}}{\sqrt{-3x^2 - 6x + 9}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{pentru} \quad x = -2;$$

$$f(-3) = -1, \quad f(-2) = -3, \quad f(1) = 3.$$

Tabloul de variație este

x	-3		-2		0		$\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$		1
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+\infty$
$f(x)$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3
			m (minim)						

Graficul este (fig. 14)

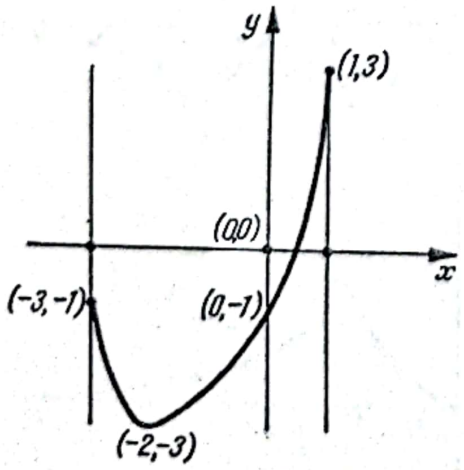

Fig. 14

Intersectînd graficul lui $f(x)$, cu graficul lui $g(x) = m(m - 4)$ rezultă:

Dacă $m(m - 4) < -3$, $m^2 - 4m + 3 < 0$, $m \in (1, 3)$

ecuația n-are nici o rădăcină reală.

Dacă $-3 \leqslant m^2 - 4m < -1$, $m \in [2 - \sqrt{3}, 1] \cup [3, 2 + \sqrt{3}]$

ecuația are două rădăcini reale.

Dacă $-1 \leqslant m^2 - 4m \leqslant 3$, $m \in [2 - \sqrt{7}, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{7}]$ ecuația admite o singură rădăcină reală.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $m^2 - 4m > 3$, $m \in (-\infty, 2 - \sqrt{7}) \cup (2 + \sqrt{7}, +\infty)$ ecuația nu admite nici o rădăcină reală.

206. Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \ln(1 + \cos 2x), \quad \cos 2x \neq -1.$$

R. Domeniul de definiție este dat de $1 + \cos 2x \neq 0$, de unde rezultă $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ (întreg).

Intersecția cu axele:

$$x = 0, \quad f(0) = \ln 2;$$

$$f(x) = 0, \quad \cos 2x = 0, \quad x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Derivata de ordinul întîi este

$$f'(x) = \frac{-2 \sin 2x}{1 + \cos 2x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2};$$

$$f'(x) = 0, \quad \sin 2x = 0, \quad x = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}, \ (k \text{ par}).$$

Derivata a doua este $f''(x) = -\frac{4}{1 + \cos 2x}$, $f''(x) < 0$ pentru orice x din domeniul de definiție.

Tabloul de variație îl vom face numai pe intervalul $[0, 2\pi]$ deoarece funcția este periodică.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$7\frac{\pi}{4}$		2π
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$	0	
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$\ln 2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2$

Graficul este (fig. 15).

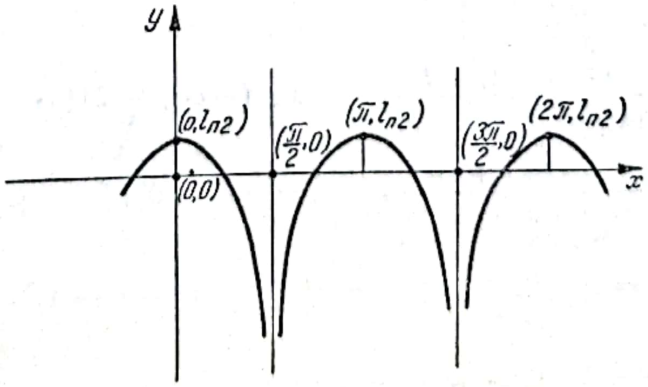

Fig. 15

207. Să se reprezinte grafic funcţia

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{\ln|x+1|}, & x\neq -1;\\ 0\quad , & x=-1\end{cases}$$

R. Din definiţia modulului şi din condiţia $\ln(x+1)\neq 0$ $f(x)$ se scrie:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x-1}{\ln(-x-1)}, & x\in(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ -1);\\ 0\quad , & x=-1;\\ \dfrac{x+1}{\ln(x+1)}\ , & x\in(-1,\ 0)\cup(0,\ +\infty)\end{cases}$$

Domeniul de definiţie: $x\in(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$$

$$f(-2\ -0)=+\infty,\quad f(-2\ +0)=-\infty,\quad \lim_{x\to -1} f(x)=0=f(-1),$$

$$f(0-0)=-\infty,\quad f(0+0)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\ln(-x-1)}{\ln^2(-x-1)}, & x\in(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ -1),\\ 0\quad , & x=-1,\\ \dfrac{\ln(x+1)-1}{\ln^2(x+1)}\ , & x\in(-1,\ 0)\cup(0,\ +\infty).\end{cases}$$

$$f'(x)=0,\qquad x_1=-e-1,\qquad f(-e-1)=e,$$

$$x_2=e-1,\qquad f(e-1)=e.$$

Derivata II este:

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(-x-1)-2}{(x+1)\ln^3(-x-1)}, & x\in(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ -1);\\ \dfrac{2-\ln(x+1)}{(x+1)\ln^3(x+1)}, & x\in(-1,\ 0)\cup(0,\ +\infty).\end{cases}$$

$$f''(0)=0\quad \text{dacă}\quad x_1'=-e^2-1,\quad f(-e^2-1)=\frac{e^2}{2},$$

şi $x_2'=e^2-1$, $f(e^2-1)=\dfrac{e^2}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul de variaţie este:

x	$-\infty$		$-e^2-1$		$-e-1$		-2		-1		0		$e-1$		e^2-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$		$-$		$-$		$+$	$+$	$+$ 0	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{e^2}{2}$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$ $\nearrow$	0 M	$\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$	e	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}$	$\nearrow$ $+\infty$
			A		m									m		B	

Graficul rezultă din figura 16.

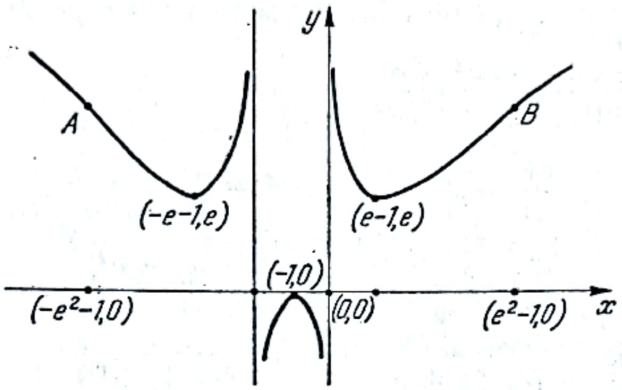

Fig. 16

208. Să se discute grafic ecuaţia

$$x^n + ax + b = 0$$

după cum n este par sau impar şi după semnele coeficienţilor a şi b.

R. Rădăcinile ecuaţiei sînt abscisele punctelor de intersecţie ale curbelor $y = x^n$, $y = -ax - b$

1) Dacă n par (fig. 17) ecuaţia poate avea două rădăcini reale distincte, sau o rădăcină reală dublă, după poziţiile relative ale dreptei faţă de parabola de ordin n. Dacă $b < 0$ ecuaţia are două rădăcini reale dinstincte pentru orice a. Dacă $b = 0$, are două rădăcini reale, dintre care una nulă.

2). Dacă n impar (fig. 18) curba $y = x^n$ are forma unei parabole cubice. Se vede că ecuaţia admite cel mult trei rădăcini reale distincte, şi admite

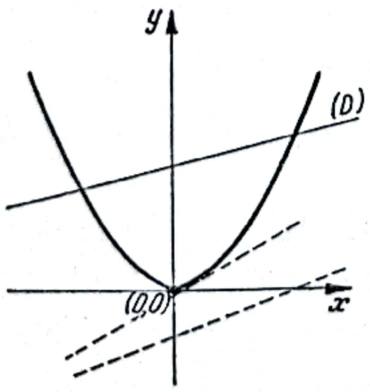

Fig. 17

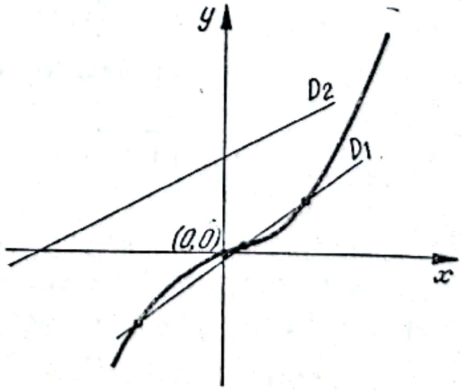

Fig. 18

totdeauna o rădăcină reală, după cum dreapta $y = -ax - b$ intersectează parabola în trei puncte într-unul singur.

Dacă dreapta D este tangentă la parabolă, poate admite o rădăcină dublă, sau o rădăcină multiplă de ordinul $n (x = 0)$.

209. Forța de frînare a unei frîne electrice cu șaibă este dată în funcție de viteza periferică v, de formula

$$F(v) = \frac{av}{b^2 + v^2}, \quad a, b > 0, \quad v \geqslant 0.$$

Să se determine forța de frînare cea mai mare posibilă.

R. $\frac{dF}{dv} = \frac{a(b^2 + v^2) - 2av^2}{(b^2 + v^2)^2} = \frac{ab^2 - av^2}{(b^2 + v^2)^2}$,

$$\frac{dF}{dv} = 0, \quad ab^2 - av^2 = 0, \quad v = b.$$

$$\frac{d^2F}{dv^2} = \frac{-2av(b^2 + v^2) + 2v(ab^2 - av^2)}{(b^2 + v^2)^3},$$

$\frac{d^2F}{dv^2} = -\frac{2ab}{(2b^2)^2} < 0$, pentru $v = b$, deci pentru $v = b$ avem maxim $F = \frac{a}{2b}$.

210. Curba de magnetizare a fierului este dată de formula $y = e^{\frac{x}{a+bx}}$, unde x este intensitatea cîmpului magnetic, y inducția, iar a și b constante. Să se determine valoarea lui x pentru care permeabilitatea $\mu = \frac{y}{x}$ are valoarea cea mai mică sau cea mai mare posibilă.

R. $\mu = \frac{y}{x} = \frac{e^{\frac{x}{a+bx}}}{x}$,

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{x}{a+bx}} + \frac{a}{x(a + bx)^2} e^{\frac{x}{a+bx}}, \quad \frac{d\mu}{dx} = 0 \text{ dacă } \frac{a}{(a + bx)^2} - \frac{1}{x} = 0,$$

sau $b^2x^2 + (2ab - a)x + a^2 = 0$,

$$x = \frac{a}{2b^2}(1 - 2b \pm \sqrt{1 - 4b}).$$

211. Dacă x este distanța unui magnet la planul unui cerc de aceeași axă cu el, forța exercitată de curentul circular de rază r asupra magnetului este $F(x) = \frac{x}{(x^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}$, $x \geqslant 0$. Să se determine x astfel încît această forță să fie maximă.

$R.\ F'(x) = \dfrac{(x^2+r^2)^{\frac{5}{2}} - 5x^2(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+r^2)^5} =$

$= \dfrac{r^2-4x^2}{(x^2+r^2)^{\frac{7}{2}}},$

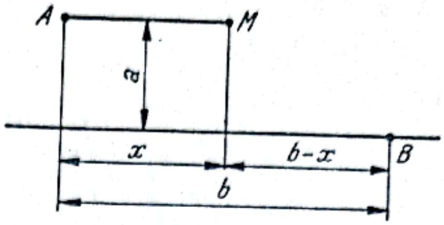

Fig. 19

$F'(x) = 0, \quad x = \dfrac{r}{2}.$

$F''(x) = \dfrac{-8x}{(x^2+r^2)^{\frac{7}{2}}} + \dfrac{7x(r^2-4x^2)}{(x^2+r^2)^{\frac{9}{2}}}, \quad F''\left(\dfrac{r}{2}\right) = -\dfrac{4r}{\left(r^2+\dfrac{r^2}{4}\right)^{\frac{7}{2}}} < 0$

F este maxim pentru $x = \dfrac{r}{2}, \quad F\left(\dfrac{r}{2}\right) = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \dfrac{1}{2r^4}.$

212. Pe malurile opuse ale unui rîu de lățime dată a, (cu malurile paralele și rectilinii), (fig. 19), se găsesc o fabrică A și o uzină de forță B prima situată în aval față de ultima la o distanță dată b.

Se cere să se găsească soluția cea mai economică pentru alimentarea cu energie a fabricii A de la uzina B, știind că linia aeriană costă m lei pe metru linear, iar cablul special izolat pentru traversarea rîului costă n lei metrul linear $(m < n)$.

$R.\ c(x) = mx + n\sqrt{a^2+(b-x)^2}, \quad c'(x) = m - \dfrac{n(b-x)}{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}$

$c'(x) = 0, \quad x = b \pm \dfrac{ma}{\sqrt{n^2-m^2}}, \quad$ pentru $x = b - \dfrac{ma}{\sqrt{n^2-m^2}}$

avem $c''(x) > 0$, deci un minim.

213. Un element galvanic de forță electromotoare E și rezistență interioară r, produce un curent I într-un circuit exterior de rezistență R. Intensitatea curentului este dată de $I = \dfrac{E}{r+R}$. Puterea efectivă a elementului galvanic este

$$L = RI^2 = \frac{RE^2}{(r+R)^2} \text{ watt.}$$

Să se determine R astfel încît L să fie maxim.

$R.\ \dfrac{dL}{dR} = \dfrac{E^2(r+R) - 2RE^2}{(R+r)^3} = \dfrac{E^2(r-R)}{(R+r)^3},$

$\dfrac{dL}{dR} = 0 \quad$ dacă $\quad R = r.$

$\dfrac{d^2L}{dR^2} = E^2\dfrac{-(R+r)R - 3(r-R)}{(R+r)^4} = -\dfrac{2E^2(2R-r)}{(R+r)^4}.$

Pentru $R = r$ avem maxim deoarece $\left.\dfrac{d^2L}{dR^2}\right|_{R=r} = -\dfrac{2rE^2}{(2r)^4} < 0.$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VI

FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

LIMITE, CONTINUITATE. DERIVATE PARȚIALE. DIFERENȚIALE. EXTREME

214. Să se determine mulțimea punctelor din plan, definită de

1) $x^2+y^2 \geqslant 4, \qquad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25} \leqslant 1.$

2) $|x-2| \leqslant 1, \qquad |y| \leqslant 2.$

R. 1) $x^2+y^2 \geqslant 4$ este exteriorul unui cerc cu centrul în punctul 0(0,0) și raza 2, iar $\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{25} \leqslant 1$ este interiorul unei elipse cu centrul în 0(0, 0) și semiaxe egale cu 3 respectiv

3) Domeniul este cel haşurat în fig. 20

2) $\begin{cases} -1 \leqslant x-2 \leqslant 1, \\ -2 \leqslant y \leqslant 2, \end{cases}$ sau $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ -2 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$

Domeniul este cel haşurat în fig. 21

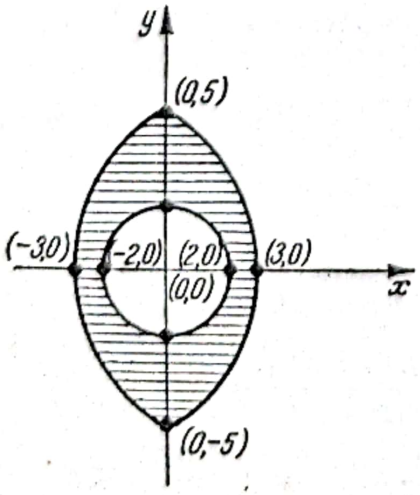

Fig. 20

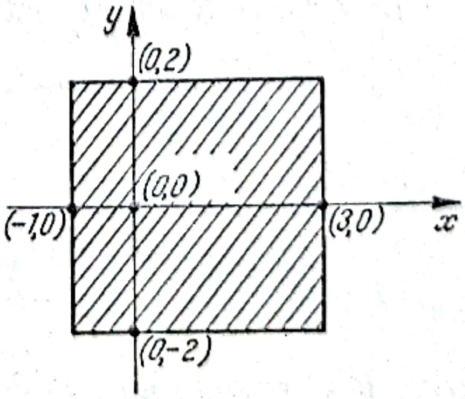

Fig. 21

Scanned with OKEN Scanner

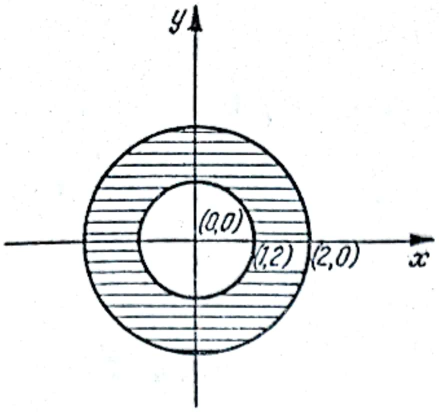

Fig. 22

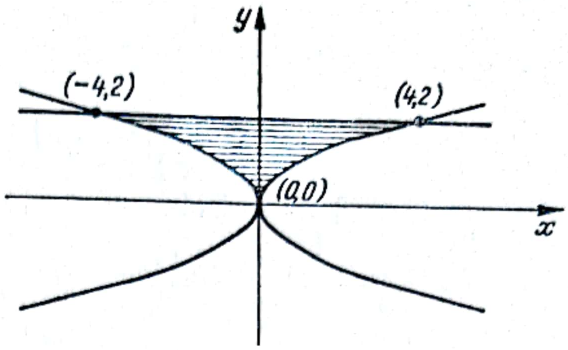

Fig. 23

Să se determine şi să se figureze domeniul de existenţă al următoarelor funcţii:

215. $f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

R. Trebuie să avem $(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) \geqslant 0$, de unde $x^2 + y^2 - 1 \geqslant 0$ şi $4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$ care este coroana circulară $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, sau $x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0$ şi $4 - x^2 - y^2 \leqslant 0$ care este mulţimea vidă. Deci domeniul de definiţie este coroana circulară $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ (fig. 22).

216. $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin (1 - y)$

R. Domeniul este dat de inegalităţile $-1 \leqslant \frac{x}{y^2} \leqslant 1$, $y \neq 0$ şi $-1 \leqslant 1 - y \leqslant 1$ sau $-y^2 \leqslant x \leqslant y^2$, $0 < y \leqslant 2$ şi este triunghiul curbiliniu mărginit de parabolele $y^2 = x$, $y^2 = -x$ şi dreapta $y = 2$ în afara punctului (0,0), (fig. 23)

217. Se dă funcţia

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^4}, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2 - (0, 0)$$

Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)], \quad \lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)], \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y).$$

R. $$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2 \cdot y^2 + (x - y)^4}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0,$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2 \cdot y^2 + (x - y)^2}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0.$$

Pentru calculul limitei $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$, considerăm $x \to 0$, $y \to 0$ pe o dreaptă ce trece prin origine $y = mx$. Avem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{m^2x^4}{m^2x^4 + (1 - m)^4x^4} = \frac{m^2}{m^2 + (1 - m)^4}$$

Deci limita nu există deoarece depinde de m.

Scanned with OKEN Scanner

218. Se consideră funcția

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

Să se arate că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$, dar $\lim\limits_{x\to 0} [\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)]$ nu există, $\lim\limits_{y\to 0} [\lim\limits_{x\to 0} f(x, y]$ nu există.

R. Deoarece $-1 \leqslant \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \leqslant 1$ atunci

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \left[(x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}\right] = \lim_{x\to 0} \left[x \sin \frac{1}{x} \lim_{y\to 0} \sin \frac{1}{y}\right].$$

Dar $\lim\limits_{y\to 0} \sin \frac{1}{y}$ nu există, deci $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ nu există.

La fel se arată că $\lim\limits_{y\to 0} [\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)]$ nu există.

219. Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

R. Fixăm $y = b$ atunci $f(x, b) = \frac{2xb}{a^2 + b^2}$, deoarece $\lim\limits_{x\to a} f(x, b) = f(a, b) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$, funcția este continuă în raport cu x.

Fixăm $x = a$, atunci $f(a, y) = \frac{2ay}{a^2 + y^2}$, care este continuă de asemenea în raport cu y.

Să vedem dacă funcția este continuă în origine

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{2x^2m^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{m^2}{1 + m^2}$$

și deci limita depinzînd de m, funcția nu este continuă în origine în raport cu ansamblul variabilelor.

Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întîi ale următoarelor funcții

Scanned with OKEN Scanner

220. $f(x, y) = xy \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, \quad xy \neq 1.$

R. $\frac{\partial f}{\partial x} = y \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + xy \frac{\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}$ sau

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + xy \frac{1+y^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2}.$$

În mod analog

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + xy \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2}.$$

221. $f(x, y, z) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \; x^2+y^2+z^2 \neq 0$

R. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{x^2yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = yz \cdot \frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} =$

$$= yz \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Funcția $f(x, y, z)$ fiind simetrică în raport cu x, y, z, rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial y} = zx \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xy \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul II pentru funcțiile

222. $f(x, y) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x, y \neq (0, 0).$

R. $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}} = -\frac{|y|}{(x^2+y^2)},$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{-xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}} = \frac{x \operatorname{sign} y}{x^2+y^2}, \quad \text{unde sign } y = \frac{|y|}{y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = +\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y^2} = -\frac{2xy \operatorname{sign} y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2+y^2)\operatorname{sign} y - 2x^2 \operatorname{sign} y}{x^2+y^2} = -\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sign} y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{(x^2+y^2)\operatorname{sign} y - 2y|y|}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sign} y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

223. $f(x,y) = \ln\,(x + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

R. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x + y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{x + y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{(x + y^2)^2}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2(x + y^2) - 4y^2}{(x + y^2)^2} = \dfrac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\dfrac{2y}{(x + y^2)^2}$

Să se calculeze df și d^2f pentru funcțiile

224. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$, $y \neq 0$.

R. $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy$, $d^2f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2x}{y^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\dfrac{1}{y^2}$.

Deci $df = \dfrac{1}{x}\,dx - \dfrac{x}{y^2}\,dy$, $d^2f = -\dfrac{2}{y^2}\,dx dy + \dfrac{2x}{y^3}\,dy^2$.

225. $f(x, y, z) = \sin\,(x - 2y + z)$.

R. $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,dz$,

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\,dy\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\,dz\,dx.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos(x - 2y + z)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2\cos(x - 2y + z)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \cos(x - 2y + z)$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin\,(x - 2y + z)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\sin(x - 2y + z)$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\sin(x - 2y + z)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = +2\sin(x - 2y + z)$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2\sin(x - 2y + z)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\sin(x - 2y + z)$.

Rezultă

$$df = \cos(x - 2y + z)\,dx - 2\cos(x - 2y + z)\,dy + \cos(x - 2y + z)\,dz$$

$$d^2f = -\sin(x - 2y + z)\,dx^2 - 4\sin(x - 2y + z)\,dy^2 - \sin(x - 2y + z)\,dz^2 + 4\sin(x - 2y + z)\,dx\,dy + 4\sin\,(x - 2y + z)\,dy\,dz - 2\sin(x - 2y + z)\,dz\,dx.$$

226. Să se calculeze

$\dfrac{\partial^{\overline{m}+\overline{n}} f}{\partial x^m \partial y^n}$, dacă $f(x, y) = (x^2 + y^2)\,e^{x+y}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Scanned with OKEN Scanner

R. $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right)$. Pentru calculul derivatei de ordin m, $\frac{\partial^m f}{\partial x^m}$, aplicăm formula lui Leibniz produsului $(x^2 + y^2)\, e^{x+y}$,

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (x^2 + y^2)_x^{(k)} (e^{x+y})_x^{(n-k)} = e^{x+y}(x^2 + y^2) +$$

$$+ 2C_m^1 e^{x+y} \cdot x + 2C_m^2 e^{x+y} = e^{x+y}[x^2 + y^2 + 2mx + m(m-1)].$$

Aplicăm lui $\frac{\partial^m f}{\partial x^m}$ formula lui Leibniz. Avem

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = \sum_{s=0}^{n} C_n^s [x^2 + y^2 + 2mx + m(m-1)]_y^{(s)} (e^{x+y})_y^{(n-s)} =$$

$$= e^{x+y}[x^2 + y^2 + 2mx + m(m-1)] + 2yC_n^1 e^{x+y} + 2C_n^2 e^{x+y} =$$

$$= e^{x+y}[x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + m(m-1) + n(n-1)].$$

227. Să se arate că dacă $f(x, y, z)$ este o funcție omogenă de grad n, de două ori derivabilă continuu atunci

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)} f = n(n-1)\, f$$

R. Funcția $f(x, y, z)$, fiind omogenă de ordin n, verifică relația lui Euler

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf.$$

Înmulțim cu $n-1$ și avem

$$(n-1)x\frac{\partial f}{\partial x} + (n-1)\, y\frac{\partial f}{\partial y} + (n-1)\, z\frac{\partial f}{\partial z} = n(n-1)\, f, \quad (\alpha).$$

Vom arăta că $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ sînt omogene de ordin $n-1$.

Într-adevăr avem $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$.

Derivînd în raport cu x avem

$$tf'_x(tx, ty, tz) = t^n f'_x(x, y, z),$$

sau $f'_x(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_x(x, y, z)$, deci $f'_x(x, y, z)$ este omogenă de ordin $n-1$. La fel se arată pentru $f'_y(x, y, z)$ și $f'_z(x, y, z)$.

Deci: $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = (n-1)\frac{\partial f}{\partial x}$,

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = (n-1)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$z\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (n-1)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind aceste relații cu x, y, z respectiv și introducînd în identitatea (α), obținem egalitatea:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}+2zx\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=n(n-1)\,f$$

care trebuia demonstrată.

228. Fie $L(u)=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$.

Să se calculeze $L(u)$ și $L(L(u))$ dacă

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

R. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

$$L(u)=x\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-2x\frac{y^2}{(x^2+y^2)}=-\frac{x}{x^2+y^2}=-u.$$

Atunci $L(L(u))=u=\frac{x}{x^2+y^2}$.

229. Fie $\Delta^* f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$ și

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Să se calculeze $\Delta^* f$ și Δf pentru funcțiile

a) $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$, b) $g(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

R. a) $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3yz$, $\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3xz$, $\frac{\partial f}{\partial z}=3z^2-3xy$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6z,$$

de unde:

$$\Delta^* f=9[(x^2-yz)^2+(y^2-xz)^2+(z^2-xy)^2],$$

$$\Delta f=6(x+y+z)$$

b) $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{-y}{(x^2+y^2+z^i)^{3/2}}$, $\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\ \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

De unde,

$$\Delta^* g=\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \Delta g=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

230. Să se calculeze diferențialele de ordinul I și II pentru funcțiile compuse:

a) $F(t) = f(t^2,\ \ln t),\ t > 0.$

b) $G(x, y,) = g\left(x^2,\ \frac{x}{y}\right),\quad y \neq 0.$

c) $H(x,\ y,\ z) = h(x + y + z,\ x^2 + y^2 + z^2).$

R. a) Notăm $u = t^2,\quad v = \ln t$ și avem

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 2t \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{t} \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$F''(t) = 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{t^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{t^2} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Rezultă

$$dF = F'(t)\, dt = \left(2t \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{t} \frac{\partial f}{\partial t}\right) dt$$

$$d^2F = F''(t)\, dt^2 = \left(4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{t^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{t^2} \frac{\partial f}{\partial v}\right) dt^2.$$

b) Notăm $u = x^2,\quad v = \frac{x}{y}$ și aplicăm formula de derivare a funcțiilor compuse. Obținem

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial g}{\partial v},\quad \frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \frac{\partial g}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 4 \frac{x}{y} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = -\frac{2x^2}{y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \frac{x}{y^3} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial g}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{x^2}{y^4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3} \frac{\partial g}{\partial v} \text{ de unde,}$$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy = \left(2x \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial g}{\partial v}\right) dx - \frac{x}{y^2} \frac{\partial g}{\partial v} dy,$$

$$d^2G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} dy^2 =$$

$$= \left(4x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 4 \frac{x}{y} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx^2 +$$

$$- 2\left(2 \frac{x^2}{y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{x}{y^3} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial g}{\partial v}\right) dx\, dy + \left(\frac{x^2}{y^4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3} \frac{\partial g}{\partial v}\right) dy^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Notăm $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$ și calculăm derivatele de ordinul I și II

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u} + 2x\frac{\partial h}{\partial v}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial u} + 2y\frac{\partial h}{\partial v},$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial u} + 2z\frac{\partial h}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + 4x\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + 2\frac{\partial h}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + 2(x+y)\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v} + 4xy\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} +$$

$$+ 2(x+z)\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v} + 4xz\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}.$$

Observînd că x, y, z intervin în $H(x, y, z)$ simetric, celelalte derivate se calculează prin permutări circulare ale variabilelor x, y, z.

Rezultă

$$dH = \frac{\partial h}{\partial u}(dx + dy + dz) + 2\frac{\partial h}{\partial v}(x\,dx + y\,dy + z\,dz).$$

$$d^2H = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(dx + dy + dz)^2 + 4\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2 +$$

$$+ 4\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}[x\,dx^2 + y\,dy^2 + z\,dz^2 + (x+y)\,dx\,dy + (y+z)\,dy\,dz +$$

$$+ (z+x)\,dz\,dz] + 2\frac{\partial h}{\partial v}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

231. Să se arate că dacă,

$$f(x, y, z) = \frac{xy}{z}\ln x + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right), \quad x > 0, \quad z \neq 0 \quad \text{și} \quad \varphi(u, v)$$

este o funcție de două variabile ce admite derivate parțiale de ordinul I atunci avem,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{xy}{z} - f(x, y, z) = 0.$$

R. Notăm $u = \frac{y}{x}$, $v = \frac{z}{x}$ și calculăm derivatele de ordinul I

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z}(\ln x + 1) + \varphi(u, v) - \frac{y}{x}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{z}{x}\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{z}\ln x + \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}\cdot\ln x + \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Atunci

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{xy}{z} - f(x, y, z) = \frac{xy}{z}(\ln x + 1) + x\varphi(u, v) - y\frac{\partial \varphi}{\partial u} -$$

$$- z\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{xy}{z}\ln x + y\frac{\partial \varphi}{\partial u} - xy\ln x + z\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{xy}{z} - \frac{xy}{z}\ln x - x\varphi(u, v) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

232. Dacă φ și ψ sînt funcții de două ori derivabile, atunci funcția

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$$

verifică ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{(ecuația coardei vibrante).}$$

R. Notăm $\lambda = x - at$, $\mu = x + at$ și calculăm derivatele. Avem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial \lambda} + a \frac{\partial u}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial u}{\partial \mu},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2}.$$

Înlocuim avem,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2}\right) - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2}\right) = 0.$$

233. Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0$$

unde φ și ψ sînt funcții de două ori derivabile verifică ecuația

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - x\psi\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

R. Notăm $u = \frac{y}{x}$. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{\partial \varphi}{du} + \psi(u) - \frac{y}{x} \frac{\partial \psi}{du}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi}{du} + \frac{\partial \psi}{du},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^4} \cdot \frac{d^2 \varphi}{du^2} + \frac{2y}{x^3} \frac{d\varphi}{du} - \frac{y}{x^2} \frac{d\psi}{du} + \frac{y}{x^2} \frac{d\psi}{du} + \frac{y^2}{x^3} \frac{d^2 \psi}{du^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^3} \frac{d^2 \varphi}{du^2} - \frac{1}{x^2} \frac{d\varphi}{du} - \frac{y}{x^2} \frac{d^2 \psi}{du^2} - \frac{1}{x} \frac{d\psi}{du} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\psi}{du},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 \varphi}{du^2} + \frac{1}{x} \frac{d^2 \psi}{du^2}.$$

Înlocuind în expresia dată, aceasta este verificată identic.

234. Să se arate că dacă φ și ψ sînt funcții de două ori derivabile atunci funcția

$$f(x, y) = y^n \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{1-n} \psi\left(\frac{x}{y}\right)$$

verifică relația

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n - 1) f.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Notăm $u = \frac{x}{y}$ și calculăm derivatele de ordin

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^{n-1}\frac{\partial \varphi}{du} + y^{-n}\frac{d\psi}{du},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -xy^{n-2}\frac{\partial \varphi}{du} + ny^{n-1}\varphi(u) - xy^{-n-1}\frac{d\psi}{du} + (1-n)y^{-n}\psi(u),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^{n-2}\frac{d^2\varphi}{du^2} + y^{-n-1}\frac{d^2\psi}{du^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -xy^{n-3}\frac{d^2\varphi}{du^2} + (n-1)y^{n-2}\frac{d\varphi}{du} - xy^{-n-2}\frac{d^2\varphi}{du^2} - ny^{-n-1}\frac{d\psi}{du},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2y^{n-4}\frac{d^2\varphi}{du^2} - (n-2)xy^{n-3}\frac{d\varphi}{du} - nxy^{n-3}\frac{d\varphi}{du} + n(n-1)y^{n-2}\varphi(u) +$$

$$+ x^2y^{-n-3}\frac{d^2\psi}{du^2} + (n+1)xy^{-n-2}\frac{d\psi}{du} - (1-n)xy^{n-2}\frac{d\psi}{du} + n(n-1)y^{-n-1}\psi(u)$$

Înlocuind avem

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x^2y^{n-2} - 2x^2y^{n-2} + x^2y^{n-2})\frac{d^2\varphi}{du^2} +$$

$$+ (x^2y^{-n-1} - 2x^2y^{-n-1} + x^2y^{-n-1})\frac{d^2\psi}{du^2} + [2(n-1)xy^{n-1} - 2nxy^{n-1} -$$

$$- (n-2)xy^{n-1}]\frac{d\varphi}{du} + [-2nxy^{-n} + (n+1)xy^{-n} + (n-1)xy^{-n}]\frac{d\psi}{du} +$$

$$+ n(n-1)y^n\varphi(u) + n(n-1)y^{n-1}\psi(u) = n(n-1)\left[y^n\psi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{1-n}\psi\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

235. Să se elimine prin derivări succesive funcțiile derivabile φ și ψ dacă:

a) $f(x, y, z) = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$, b) $f(x, y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$.

R. a) Calculăm derivatele de ordinul I. Notăm

$$u = \frac{x}{y}, \quad v = \frac{y}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{z}\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

Din prima și a treia relație găsim

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = y\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{z^2}{y}\frac{\partial f}{\partial z},$$

și înlocuind în a doua relație obținem

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Notăm $u = x + y$, $v = x - y$. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d\varphi}{du} + \frac{d\psi}{dv}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\varphi}{du} - \frac{d\psi}{dv}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{d^2\psi}{dv^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{d^2\psi}{dv^2}$$

Scăzînd ultimele două relaţii obţinem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

236. Folosind diferenţiala unei funcţii de mai multe variabile, să se calculeze

a) $(1{,}03) \cdot (2{,}02)^2 \cdot (3{,}05)^3$, b) $\sqrt[3]{(1{,}04)^3 + (1{,}96)^3}$.

R. Dacă $f(x, y, z) : E \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ şi $(x_0, y_0, z_0) \in E$ putem scrie

$$f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \simeq (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) +$$

$$+ (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0).$$

a) Considerăm funcţia

$f(x, y, z) = xy^2z^3$ şi scriem formula de mai sus luînd:

$x = 1{,}03$, $y = 2{,}02$, $z = 3{,}05$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3$.

Avem,

$$xy^2z^3 - x_0y_0^2z_0^3 \simeq y_0^2z_0^3 (x - x_0) + 2x_0y_0z_0^3(y - y_0) + 3x_0y_0^2z_0^2(z - z_0)$$

de unde,

$$(1{,}003) \cdot (2{,}002)^2 \cdot (3{,}005)^3 \simeq 108 + 108(0{,}03) + 108(0{,}02) + 108(0{,}05) =$$

$$= 118{,}8.$$

b) Considerăm funcţia

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Vom avea ca şi în cazul anterior,

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

sau

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} \simeq \sqrt[3]{x_0^3 + y_0^3} + \frac{x_0^2}{\sqrt[3]{(x_0^3 + y_0^3)^2}}(x - x_0) + \frac{y_0^2}{\sqrt[3]{(x_0^3 + y_0^3)^2}}(y - y_0)$$

Dacă luăm acum $x = 1{,}04$, $y = 1{,}97$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ şi făcînd calculele găsim

$$\sqrt[3]{(1{,}04)^3 + (1{,}96)^3} \simeq 1{,}94.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se afle valorile extreme ale următoarelor funcții:

237. $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - xy, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$

R. Punctele staționare, sînt soluțiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Avem,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x - y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2y - x = 0$$

care are soluțiile:

$$M_1(x_1 = 0, \quad y_2 = 0), \qquad M_2\left(x_2 = \frac{3}{2}, \quad y_2 = \frac{3}{2}\right),$$

$$M_3\left(x_3 = -\frac{3}{2}, \quad y_3 = -\frac{3}{2}\right), \qquad M_4\left(x_4 = \frac{1}{2}, \quad y_4 = -\frac{1}{2}\right),$$

$$M_5\left(x_5 = -\frac{1}{2}, \quad y_5 = \frac{1}{2}\right).$$

Natura extremelor este dată de semnul expresiei $rt - s^2$ și a lui r; unde:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2, \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2.$$

Considerînd cele trei puncte avem:

Pentru $M_1(0,0)$ rezultă: $r_0 = -2, \; s_0 = -1, \; t_0 = -2.$

(Notăm r_0, s_0, t_0, valorile derivatelor parțiale de ordinul II într-un punct staționar).

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 3 > 0, \qquad r_0 = -2, \; M_1 \text{ punct de minim.}$$

Pentru $M_2\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\quad r_0 t_0 - s^2 = 49 > 0, \quad M_2$ minim.

Pentru $M_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ $\quad r_0 t_0 - s^2 = 49 > 0, \quad M_3$ minim.

Pentru $M_4\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $\quad r_0 t_0 - s^2 = 0,$ îndoială.

Pentru $M_5\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\quad r_0 t_0 - s^2 = 0,$ îndoială.

238. $f(x, y) = (8x^2 - 6xy + 3y^2)\, e^{2x+3y}, \; (x, y) \in \mathbf{R}^2.$

R. Sistemul punctelor staționare este:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2x+3y}(16x^2 - 12xy + 6y^2 + 16x - 6y) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x+3y}(24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y) = 0,$$

cu soluțiile:

$$M_1(0, 0), \qquad M_2\left(-\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculăm derivatele parțiale de ordin II:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{2x+3y}(32x^2 - 24xy + 12y^2 + 64x - 24y + 16),$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{2x+3y}(72x^2 - 54xy + 27y^2 - 36x + 36y + 6),$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{2x+3y}(48x^2 - 36xy + 18y^2 + 36x - 6y - 6).$$

Pentru $M_1(0,0)$, $r_0 t_0 - s_0^2 = 60\, e^{-4} > 0$, $r_0 = 16\, e^{-2} > 0$
punct de minim $f(0, 0) = 0$.

Pentru $M_1\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ $r_0 t_0 - s_0^2 = -60\, e^{-4} < 0$ punct șa

$$f\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{-2}.$$

239. $f(x, y) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x + y^3 - 3y^2 - 3y$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

R. Punctele staționare sînt date de soluțiile sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 24x^2 + 36x - 8 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6y - 3 = 0.$$

Avem punctele

$M_1(2 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{2})$, $M_2(2 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{2})$, $M_3(2 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{2})$,

$M_4(2 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{2})$, $M_5(2, 1 - \sqrt{2})$, $M_6(2,1 + \sqrt{2})$.

Calculăm derivatele parțiale de ordin II:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 48x + 36, \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 6$$

Discutăm natura punctelor:

$M_1(2 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{2})$, $r_0 t_0 - s_0^2 = -144\sqrt{2} < 0$, M_1 este punct „șa".

$M_2(2 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{2})$, $r_0 t_0 - s_0^2 = 144\sqrt{2} > 0$, $r_0 = 24 > 0$, M_2 *minim*.

$M_3(2 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{2})$, $r_0 t_0 - s_0^2 = -144\sqrt{2} < 0$, M_3 este punct „șa"

$M_4(2 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{2})$, $r_0 t_0 - s_0^2 = 144\sqrt{2} > 0$, $t_0 = 6\sqrt{2}$, M_4 *minim*

$M_5(2, 1 - \sqrt{2})$, $r_0 t_0 - s_0^2 = 72\sqrt{2} > 0$, $t_0 = -14$: M_5 *maxim*

$M_6(2, 1 + \sqrt{2})$, $r_0 t_0 - s_0^2 = -72\sqrt{2} < 0$, M_6 punct „șa".

Scanned with OKEN Scanner

240. $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi.$

R. Punctele staționare sînt date de:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) =$$
$$= \sin y \sin(2x + y) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y) =$$
$$= \sin x \sin(x + 2y) = 0.$$

Acest sistem este echivalent cu următoarele

$$\text{I} \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases}, \qquad \text{II} \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin(x + 2y) = 0 \end{cases}, \qquad \text{III} \begin{cases} \sin(2x + y) = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases},$$

$$\text{IV} \begin{cases} \sin(2x + y) = 0 \\ \sin(x + 2y) = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile:

$$M_0(0, 0),\ M_2(0, \pi),\ M_3(\pi, 0),\ M_4(\pi, \pi),\ M_5\left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ M_6\left(\frac{\pi}{2}, 0\right),\ M_7\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$M_8\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),\ M_9\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right),\ M_{10}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right),\ M_{11}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right),\ M_{12}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Derivatele de ordin II sînt:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \sin y \cos(2x + y), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin 2(x + y),$$
$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \sin x \cos(x + 2y).$$

Pentru punctele $M_i (i = 1, 2, \ldots, 10)$

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0, \qquad \text{îndoială.}$$

Pentru $M_{11}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{9}{4} > 0$, $r_0 = -\sqrt{3} < 0$

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ maxim.}$$

Pentru $M_{12}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{9}{4} > 0$, $r_0 = \sqrt{3} > 0$,

$$f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{8} \text{ minim.}$$

241. $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$

R. Sistemul care dă punctele staționare este:

$$\cos x + \cos(x + y) = 0, \qquad \cos y + \cos(x + y) = 0$$

cu soluția, $M_0\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

Scanned with OKEN Scanner

Derivatele de ordin II sînt:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x - \sin(x+y), \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y),$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin y - \sin(x+y).$$

$r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{9}{4} > 0$ $r_0 = -\sqrt{3}$ deci M_0 este punct de maxim și

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

242. $f(x, y, z) = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z) = 0, \qquad a > 0.$

R. Punctele staționare sînt date de sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3(a - x - 2y - 3z) - xy^2z^3 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3(a - x - 2y - 3z) - 2xy^2z^3 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2(a - x - 2y - 3z) - 3xy^2z^3 = 0.$$

Rezolvînd sistemul găsim $x = y = z = \frac{a}{7}$.

În punctul $M\left(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}\right)$ avem

$$A_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\frac{a^5}{7^5}, \quad A_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2\frac{a^5}{7^5}, \quad A_{13} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3\frac{a^5}{7^5},$$

$$A_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2\frac{a^5}{7^5}, \quad A_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6\frac{a^5}{7^5}, \quad A_{23} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -6\frac{a^5}{7^5},$$

$$A_{31} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -3\frac{a^5}{7^5}, \quad A_{32} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -6\frac{a^5}{7^5}, \quad A_{33} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -12\frac{a^5}{7^5}.$$

Avem $\Delta_1 = A_{11} = -2\frac{a^5}{7^5}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 8\frac{a^{10}}{7^{10}}$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = -18\frac{a^{10}}{7^{10}}.$$

Rezultă $f_{max} = \frac{a^7}{7^7}$ pentru $x = y = z = \frac{a}{7}$.

Scanned with OKEN Scanner

243. $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $(x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0)$.

R. Sistemul care dă punctele staționare este

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0$$

Rezolvînd acest sistem obținem, $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = 1$.

În punctul $M\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ avem

$$A_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \quad A_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2, \quad A_{13} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$A_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2, \quad A_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3, \quad A_{23} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -2,$$

$$A_{31} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0, \quad A_{32} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -2, \quad A_{33} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6.$$

$$\Delta_1 = A_{11} = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 64$$

Rezultă $f_{min} = 4$ pentru $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = 1$.

244. Să se găsească extremele funcției

$f(x, y, z) = xy^2z^3$, cu legătura $x + 2y + 3z = a$

$(x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad a > 0)$.

R. Considerăm funcția

$\Phi(x, y, z, \lambda) = xy^2z^3 + \lambda(x + 2y + 3z - a)$

Punctele staționare ale funcției Φ sînt date de

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y^2z^3 + \lambda = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2xyz^3 + 2\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 3xy^2z^2 + 3\lambda = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x + 2y + 3z - a = 0.$$

Rezolvînd sistemul de mai sus găsim

$$x = \frac{a}{6}, \quad y = \frac{a}{6}, \quad z = \frac{a}{6}, \quad \lambda = -\frac{a^5}{6^5}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculăm diferențiala a doua a funcției

$$\Phi(x, y, z) = xy^2z^3 - \frac{a^5}{6^5}(x + 2y + 3z - a)$$

în punctul $M\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$;

$$d^2\Phi = 2\frac{a^4}{6}dy^2 + 6\frac{a^4}{6^4}dz^2 + 4\frac{a^4}{6^4}dx\,dy + 12\frac{a^4}{6^4}dy\,dz + 3\frac{a^4}{6^4}dz\,dx$$

Dar în punctul M avem și

$dx + 2dy + 3dz = 0$ de unde scoatem $dx = -2dy - 3dz$ și înlocuim în $d^2\Phi$ avem

$$d^2\Phi = -6\frac{a^4}{6^4}dy^2 - 3\frac{a^4}{6^6}dz^2 - 6\frac{a^4}{6^4}dy\,dz.$$

Avem, $\Delta_1 = -6$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 9.$

Avem $f_{max} = \frac{a^6}{6^6}$, pentru $x = y = z = \frac{a}{6}$.

245. Să se găsească un paralelipiped de volum maxim astfel încît suma dimensiunilor sale să fie constantă.

R. Avem de calculat extremele funcției

$$V(x, y, z) = xyz \text{ cu legătura } x + y + z = a.$$

Formăm funcția

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - a)$$

Punctele staționare sînt date de sistemul

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = yz + \lambda = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = xz + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = xy + \lambda = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = x + y + z - a = 0.$$

Rezolvînd sistemul, găsim $x = y = z = \frac{a}{3}$, $\lambda = -\frac{a^2}{9}$.

Calculăm diferențiala a doua, în punctul $M\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ a funcției

$$\Phi(x, y, z) = xyz - \frac{a^2}{9}(x + y + z - a),$$

$$d^2\Phi = \frac{a}{3}dx\,dy + \frac{a}{3}dy\,dz + \frac{a}{3}dz\,dx$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relația de legătură avem $dx + dy + dz = 0$, de unde $dx = -dy - dz$, și înlocuind în $d^2\Phi$ rezultă

$$d^2\Phi = -\frac{a}{3}[dy^2 + dy\,dz + dz^2]$$

$$\Delta_1 = -\frac{a}{3}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{a}{3} & \frac{a}{6} \\ \frac{a}{6} & \frac{a}{3} \end{vmatrix} = \frac{a^2}{12}.$$

Rezultă $V_{max} = \frac{a^3}{27}$ pentru $x = y = z = \frac{a}{3}$.

246. Inductanța unei bobine are expresia

$$u(x, y, z) = \frac{mxyz}{ax + by + cz},$$

unde x este raza medie de înfășurare, y diferența dintre raza exterioară și raza interioară, iar z lungimea bobinei, a, b, c și m constante. Volumul bobinei este $V = 2\pi xyz$. Se cere să se determine valorile lui x, y și z astfel încît pentru un volum dat, u să fie maxim.

R. Vom căuta minimul lui $\frac{1}{u} = \frac{1}{m}\left(\frac{a}{yz} + \frac{b}{zx} + \frac{c}{xy}\right)$, ținînd seama că $z = \frac{V}{2\pi} \cdot \frac{1}{xy}$; avem

$$U = \frac{1}{u} = \frac{2\pi}{mV}\left[ax + by + \frac{Vc}{2\pi}\,\frac{1}{xy}\right], \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

conduce la $a - \frac{Vc}{2\pi x^2 y} = 0$, $b - \frac{Vc}{2\pi xy^2} = 0$, de unde

$$x = \sqrt[3]{\frac{bVc}{a^2 2\pi}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{aVc}{b^2 2\pi}}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{abV}{2\pi c^2}}, \quad u = \frac{m}{3}\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2 abc}},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{Vc}{2\pi x^3 y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{Vc}{2\pi x^2 y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{Vc}{2\pi xy^3}$$

Rezultă

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{3V^2c^2}{4\pi^2}\left(\sqrt[3]{\frac{4\pi ab}{V^2c^2}}\right)^4 > 0$$

și $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2 2}{aVc}} > 0$, pentru x și y aflați mai sus. Rezultă că $U = \frac{1}{u}$ este minim. Deci u este maxim pentru valorile x, y, z găsite.

247. Se cere să se construiască cu o cantitate de material dată, o cisternă avînd forma unui paralelipiped drept deschis la suprafață. Să se determine dimensiunile cisternei în așa fel încît capacitatea sa să fie maximă în ipoteza

Scanned with OKEN Scanner

că nu se ține seama de grosimea pereților și că la construcție nu avem pierderi de material.

R. Fie x, y, dimensiunile bazei, iar z înălțimea. Avem

$$V = xyz \text{ și } xy + 2xz + 2yz = a^2, \text{ de unde } V = \frac{xy(a^2 - xy)}{2(x + y)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(a^2 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(a^2 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \text{dacă } x = 0, \quad y = 0 \text{ sau } x = \pm y.$$

Convine numai $x = y = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $\quad z = \frac{a}{3\sqrt{3}}$.

În punctul $x = y = \frac{a}{\sqrt{3}}$ avem $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ și $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0$.

Deci $V = \frac{a^3}{9\sqrt{3}}$ este maximul căutat.

248. S-au măsurat două laturi ale unui triunghi cu o eroare de $2^0/_{00}$ și unghiul cuprins între ele cu o precizie de 15′. Care este eroarea măsurată în procente cu care s-a obținut suprafața triunghiului.

R. $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$, $\quad dS = \frac{1}{2}(bc \cos \alpha \, d\alpha + b \sin \alpha \, dc + c \sin \alpha \, db)$

Avem $\left|\frac{dS}{S}\right| \leqslant |\operatorname{ctg} \alpha| \, d\alpha + \left|\frac{dc}{c}\right| + \left|\frac{db}{b}\right|$

Din datele problemei avem $\left|\frac{dc}{c}\right| = \left|\frac{db}{b}\right| = \frac{2}{1000}$, $\quad |d\alpha| = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{4}$

Eroarea suprafeței va fi

$$100\left|\frac{dS}{S}\right| \leqslant |\operatorname{ctg} \alpha| \frac{3{,}14}{720} \cdot 100 + \frac{4.100}{1000}$$

sau

$$100\left|\frac{dS}{S}\right| \leqslant 0{,}4 + 0{,}436 \, |\operatorname{ctg} \alpha|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VII

FUNCȚII IMPLICITE. DEPENDENȚA FUNCȚIONALĂ

249. Să se calculeze y' și y'' pentru funcțiile $y = y(x)$ definite implicit de următoarele ecuații:

1). $x^3 + y^3 - 2xy = a^2$, $\quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

2). $\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 1 = 0$, $\quad x^2 + y^2 \neq 0$.

R. 1). Derivăm relația dată în raport cu x, ținînd seama că y este funcție de x. Rezultă

$$3x^2 + 3y^2y' - 2y - 2xy' = 0, \quad (\alpha)$$

de unde,

$$y' = \frac{3x^2 - 2y}{2x - 3y^2}, \qquad 2x - 3y^2 \neq 0, \quad (\beta).$$

Derivînd din nou în raport cu x relația (α), obținem

$$6x + 6yy'^2 + 3y^2y'' - 4y' - 2xy'' = 0$$

sau

$$y'' = 2\,\frac{3x + 3yy'^2 - 4y'}{2x - 3y^2}.$$

Înlocuind pe y' din (β) rezultă

$$y'' = 2\,\frac{3x(2x - 3y^2)^2 + 3y(3x^2 - 2y)^2 - 4(3x^2 - 2y)(2x - 3y^2)}{(2x - 3y^2)^2}.$$

2). În mod asemănător, obținem

$$\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{yy'}{x^2 + y^2} - \frac{\frac{xy' - y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = 0$$

de unde

$$x + yy' - xy' + y = 0, \quad (\gamma).$$

Din (γ), $y' = \frac{x+y}{x-y}$, $\quad x \neq y \quad (\delta)$.

Derivînd (γ) în raport cu x şi ţinînd cont de (δ), obţinem

$$y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}, \qquad x \neq y.$$

250. Să se calculeze y', y'', y''' în punctul $x=1$, $y=1$, dacă $y=y(x)$ este definită implicit de ecuaţia,

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + x - y - 2 = 0, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

R. Derivăm relaţia în raport cu x. Avem

$$2x - 2y - 2xy' + 2yy' + 1 - y' = 0, \quad (\alpha),$$

de unde,

$$y' = \frac{2x-2y+1}{2x-2y-1}, \qquad 2x - 2y - 1 \neq 0.$$

Rezultă $y'(1) = -1$.

Derivînd relaţia (α) în raport cu x, rezultă

$$2 - 4y' - 2xy'' + 2y'^2 - 2yy'' - y'' = 0, \quad (\beta).$$

De aici

$$y'' = \frac{2 + 2y'^2 - 4y'}{2x-2y-1}, \qquad 2x - 2y - 1 \neq 0,$$

de unde,

$$y''(1) = -8.$$

Derivăm relaţia (β) în raport cu x:

$$-6y'' - 2xy''' - 2yy''' - y''' = 0.$$

Rezultă

$$y''' = \frac{-6y''}{2x-2y-1}, \qquad 2x - 2y - 1 \neq 0,$$

deci $y'''(1) = -48$.

Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei $z(x, y)$, definită implicit de ecuaţiile:

251. a). $z = \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad x^2 + y^2 \neq 0.$

b). $x + y + z = e^{x+y-z}, \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$

R. a). Derivăm relaţia în raport cu x şi y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} \cos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{zx}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right),$$

de unde,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x\left(\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}-z\right)}{(x^2+y^2)\left(1-\cos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)},\qquad (x^2+y^2)\left(1-\cos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\neq 0.$$

În mod analog obținem

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}-z\right)}{(x^2+y^2)\left(1-\cos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)},\qquad (x^2+y^2)\left(1-\cos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\neq 0.$$

b). Derivăm relația în raport cu x și apoi cu y. Avem

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}=\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right)e^{x+y-z},$$

de unde,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^{x+y-z}-1}{1+e^{x+y-z}}=\frac{x+y+z-1}{x+y+z+1},\qquad x+y+z+1\neq 0.$$

În mod asemănător,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{x+y-z}-1}{1+e^{x+y-z}}=\frac{x+y+z-1}{x+y+z+1},\qquad x+y+z+1\neq 0.$$

252. Să se calculeze derivatele parțiale de ordin I și II pentru funcția $z(x, y)$, definită implicit de ecuația,

$$y+\operatorname{arctg}\frac{x}{z-y}-z=0,\qquad z-y\neq 0.$$

R. Derivînd în raport cu x, obținem

$$\frac{(z-y)^2}{(z-y)^2+x^2}\cdot\frac{z-y-x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-y)^2}-\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

sau

$$z-y-x\frac{\partial z}{\partial x}-[(z-y)^2+x^2]\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad (\alpha)$$

de unde,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z-y}{(z-y)^2+x^2+x},\qquad (z-y)^2+x^2+x\neq 0.$$

Derivînd încă o dată relația (α) în raport cu x, obținem:

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left[2(z-y)\frac{\partial z}{\partial x}+2x\right]\frac{\partial z}{\partial x}-[(z-y)^2+x^2]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

De unde, ținînd seama de expresia lui $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, rezultă,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y-z)(x+1)[(z-y)^2+x^2]}{[(z-y)^2+x^2+x]^3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivăm acum relaţia din enunţ în raport cu y:

$$1-\frac{(z-y)^2}{(z-y)^2+x^2}\cdot\frac{x\left(\frac{\partial z}{\partial y}-1\right)}{(z-y)^2}-\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

sau,

$$[(z-y)^2+x^2+x]\frac{\partial z}{\partial y}-[(z-y)^2+x^2+x]=0,$$

de unde,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=1, \qquad (z-y)^2+x^2+x\neq 0.$$

Rezultă

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$$

Să se calculeze dz şi d^2z, dacă $z(x, y)$ este definită implicit de ecuaţiile:

253. a). $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$

b). $\frac{y}{z}-\ln\frac{z}{x}=0, \qquad \frac{z}{x}>0, \qquad xz\neq 0.$

R. a). Derivăm în raport cu x relaţia dată şi avem,

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2z\frac{\partial z}{\partial x}}{c^2}=0, \quad (\alpha).$$

de unde,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c^2x}{a^2z}, \qquad z\neq 0.$$

Derivăm relaţia dată în raport cu y şi avem,

$$\frac{2y}{b^2}-\frac{2z\frac{\partial z}{\partial y}}{c^2}=0, \quad (\beta),$$

de unde,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c^2y}{b^2z}, \qquad z\neq 0.$$

Rezultă,

$$dz=\frac{c^2}{z}\left[\frac{x}{a^2}dx+\frac{y}{b^2}dy\right], \qquad z\neq 0.$$

Derivăm relaţia (α) în raport cu x şi avem,

$$\frac{1}{a^2}-\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{c^2}=0, \quad \text{şi, înlocuind } \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \text{rezultă,}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{c^2}{a^4z^3}(a^2z^2-c^2x^2), \qquad z\neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivînd (α) în raport cu y, rezultă,

$$-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{c^2}=0,$$

de unde,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{c^4}{a^2b^2}\cdot\frac{xy}{z^3},\qquad z\neq 0.$$

Derivăm (β) în raport cu y și, ținînd seama de expresia lui $\frac{\partial z}{\partial y}$ rezultă,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{c^2}{b^4z^3}(b^2z^2-c^2y^2),\qquad z\neq 0.$$

Deci,

$$\mathrm{d}^2z=\frac{c^2}{a^4z^3}(a^2z^2-c^2x^2)\,\mathrm{d}x^2-2\frac{c^4}{a^2b^2}\frac{xy}{z^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{c^2}{b^4z^3}(b^2z^2-c^2y^2)\,\mathrm{d}y^2.$$

b). Derivăm relația dată în raport cu x. Avem,

$$-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{x}{z}\cdot\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}=0,$$

sau,

$$z^2-xy\frac{z}{x}-zx\frac{z}{x}=0,\qquad(\alpha),$$

de unde,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z^2}{x(y+z)},\qquad x(y+z)\neq 0.$$

Derivînd relația (α) în raport cu x rezultă

$$2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-zx\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

de unde,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2z^2}{x^2(y+z)^3},\qquad x^2(y+z)^3\neq 0.$$

Derivăm relația din enunț în raport cu y:

$$\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{x}{z}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

sau,

$$z-y\frac{\partial z}{\partial y}-z\frac{\partial z}{\partial y}=0,\qquad(\beta),$$

de unde,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{z+y},\qquad z+y\neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivăm relaţia (β) în raport cu y şi apoi cu x:

$$\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-z\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0,$$

de unde,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{z^2}{(y+z)^3},\quad z+y\neq 0,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2xyz^2}{x^2(z+y)^2},\quad x^2(z+y)^2\neq 0.$$

De aici,

$$dz=\frac{z}{x(y+z)}[z\,dx+x\,dy],\qquad d^2z=-\frac{z^2(y\,dx-x\,dy)^2}{x^2(y+z)^3}.$$

254. Să se demonstreze că funcţia $z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia,

$$F\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)=0,\qquad z\neq 0,$$

unde $F(u, v)$ este o funcţie derivabilă parţial în raport cu u şi v, verifică relaţia

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

R. Derivăm în raport cu x şi y, şi avem

$$\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v}=0,$$

$$-\frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}+\left(\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial v}=0.$$

De unde,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z\dfrac{\partial F}{\partial u}}{x\dfrac{\partial F}{\partial u}+y\dfrac{\partial F}{\partial v}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{z\dfrac{\partial F}{\partial v}}{x\dfrac{\partial F}{\partial u}+y\dfrac{\partial F}{\partial v}}$$

cu condiţia, $x\dfrac{F}{u}+y\dfrac{F}{v}\neq 0.$

Înlocuind în relaţia dată, rezultă

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz\dfrac{\partial F}{\partial u}+yz\dfrac{\partial F}{\partial v}}{x\dfrac{\partial F}{\partial u}+y\dfrac{\partial F}{\partial v}}=\frac{z\left(x\dfrac{\partial F}{\partial u}+y\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)}{x\dfrac{\partial F}{\partial u}+y\dfrac{\partial F}{\partial v}}=z.$$

255. Să se calculeze $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$ dacă, $z(x, y)$ este o funcţie definită implicit de ecuaţia,

$$F(x,\ x+y,\quad x+y+z)=0,$$

unde $F(u, v, w)$ este o funcţie care admite derivate parţiale de ordin I şi II în raport cu u, v şi w.

R. Notăm $u=x,\quad v=z+y,\quad w=x+y+z.$

Scanned with OKEN Scanner

Derivăm în raport cu x și y și avem,

$$\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial w}=0, \quad (\alpha);$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial w}=0,$$

de unde,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}+\dfrac{\partial F}{\partial v}+\dfrac{\partial F}{\partial w}}{\dfrac{\partial F}{\partial w}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial w}\neq 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial v}+\dfrac{\partial F}{\partial w}}{\dfrac{\partial F}{\partial w}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial w}\neq 0.$$

Derivăm relația (α) în raport cu x și avem,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial w}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial w}+$$

$$+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial w}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial w}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial w}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}=0.$$

Înlocuind $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ cu expresia sa avem,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-1}{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial w^2}\right)^3}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial F}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial w^2}-2\frac{\partial F}{\partial w}\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial w}+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial w}\right)\right].$$

256. Să se afle extremele funcției y definită implicit de ecuația

$$x^2+2y^2-2xy+4x-y+6=0, \qquad (x, y)\in\mathbf{R}^2.$$

R. Dacă ecuația $F(x, y)=0$ definește pe y ca funcție implicită de x, atunci,

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}; \qquad F'_y\neq 0.$$

Punctele staționare ale funcției y vor fi deci soluții ale sistemului,

$$\begin{cases} F(x, y)=0 \\ F'_x(x, y)=0 \end{cases} \quad (\alpha),$$

care satisfac condiția $F'_y(x, y)\neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie (x_0, y_0) o soluție a sistemului (α), atunci:

— dacă $y''(x_0) > 0$, x_0 este punct *minim* al lui y,

— dacă $y''(x_0) < 0$, x_0 este punct *maxim* al lui y.

În cazul studiat, avem

$$y' = 2\frac{x - y + 2}{2x - 4y + 1}, \qquad 2x - 4y + 1 \neq 0.$$

Punctele staționare sînt date de sistemul:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - y + 6 = 0. \end{cases}$$

Soluțiile acestui sistem sînt:

$(x_1 = -3, \quad y_1 = -1)$, $(x_2 = -4, \quad y_2 = -2)$, și satisfac condiția

$F'_y(-3, -1) \neq -1 \neq 0$, $F'_y(-4, -2) = 1 \neq 0$.

Avem,

$$y'' = 2\frac{(1 - y')(2x - 4y + 1) - (2 - 4y')(x - y + 2)}{(2x - 4y + 1)^2}.$$

Rezultă:

$y''(-3) = -2 < 0$, deci $y_{max} = -1$ pentru $x = -3$;

$y''(-4) = 2 > 0$, deci $y_{min} = -2$ pentru $x = -4$.

257. Să se afle extremele funcției $z(x, y)$ definită implicit de ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0.$$

R. Dacă $F(x, y, z) = 0$ definește pe z ca funcție implicită de x și y, atunci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}, \qquad F'_z \neq 0.$$

Punctele staționare sînt soluții ale sistemului:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, z) = 0, \\ F'_y(x, y, z) = 0, \\ F(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

care satisfac condiția $F'_z(x, y, z) \neq 0$.

Pentru a vedea care din punctele staționare este extrem se procedează ca în cazul funcțiilor de două variabile.

În cazul particular studiat, avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x - 1}{z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y - 1}{z}, \qquad z \neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul care dă punctele staţionare este:

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0, \\ x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0 \end{cases} \qquad (\alpha)$$

Soluţiile sistemului (α) sînt punctele $A(x=1,\ y=1,\ z=3)$ şi $B(x=1,\ y=1,\ z=3)$.

Condiţia $z \neq 0$ este satisfăcută în ambele cazuri.

Calculăm derivatele de ordinul doi ale lui z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z^2+(x-1)^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(x-1)(y-1)}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(y-1)^2+z^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\Big|_A = \frac{1}{9} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_A = -\frac{1}{3} < 0;$$

deci $x=1,\ y=1,\ z=3$ punct maxim.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\Big|_B = \frac{1}{9} > 0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_B = \frac{1}{3} > 0$$

deci $x=1,\ y=1,\ z=-3$ punct de minim.

258. Relaţiile

$$\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ x^2+y^2+z^2-2t=0, \\ x^3+y^3+z^3-t^3=0, \end{cases}$$

definesc pe $x,\ y,\ z$ ca funcţii de t. Să se calculeze

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}.$$

R. Derivînd în raport cu t, avem:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dz}{dt}=0 \\ 2x\dfrac{dx}{dt}+2y\dfrac{dy}{dt}+2z\dfrac{dz}{dt}-2=0 \\ 3x^2\dfrac{dx}{dt}+3y^2\dfrac{dy}{dt}+3z^2\dfrac{dz}{dt}-3t^2=0 \end{cases}$$

de unde,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2y & 2z \\ 3t^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix}} = -\frac{6(z-y)(z+y-t^2)}{6(y-x)(z-x)(z-y)} = -\frac{z+y-t^2}{(y-x)(z-x)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2x & 2 & 2z\\ 3x^2 & 3t^2 & 3z^2\end{vmatrix}}{6(y-x)(z-x)(z-y)}=-\frac{(x-z)(x+z-t^2)}{(z-y)(x-y)(x-z)}=-\frac{x+z-t^2}{(z-y)(x-y)},$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2x & 2y & 2\\ 3x^2 & 3y^2 & 3t^2\end{vmatrix}}{6(y-x)(z-x)(z-y)}=-\frac{(y-x)(y+z-t^2)}{(y-x)(z-x)(z-y)}=-\frac{y+x-t^2}{(z-x)(z-y)},$$

pentru $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$.

259. Relaţiile

$$\begin{cases} u+v-x-y=0\\ y\sin u-x\sin v=0\end{cases}$$

definesc pe u şi v ca funcţii de x şi y. Să se calculeze du şi dv.

R. Derivăm relaţiile în raport cu x şi avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}-1=0,\qquad y\cos u\frac{\partial u}{\partial x}-x\cos v\frac{\partial v}{\partial x}-\sin v=0,$$

de unde, dacă $x\cos v+y\cos u\neq 0$, rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ \sin v & -x\cos v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ y\cos u & -x\cos v\end{vmatrix}}=\frac{x\cos v+\sin v}{x\cos v+y\cos u},\quad x\cos v+y\cos u\neq 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ y\cos u & \sin v\end{vmatrix}}{-x\cos v-y\cos u}=\frac{y\cos u-\sin v}{x\cos v+y\cos u},\quad x\cos v+y\cos u\neq 0$$

Derivăm relaţiile în raport cu y şi avem

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}-1=0,\qquad y\cos u\frac{\partial u}{\partial y}-x\cos v\frac{\partial v}{\partial y}+\sin u=0,$$

de unde, dacă $x\cos v+y\cos u\neq 0$, rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ -\sin u & -x\cos v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ y\cos u & -x\cos v\end{vmatrix}}=\frac{-x\cos v+\sin u}{-x\cos v-y\cos u}=\frac{x\cos v-\sin u}{x\cos v+y\cos u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ y\cos u & -\sin u\end{vmatrix}}{-x\cos v-y\cos u}=\frac{y\cos u+\sin u}{x\cos v+y\cos u}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \frac{(x\cos v + \sin v)\,dx + (x\cos v - \sin u)\,dy}{x\cos v + y\cos u},$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = \frac{(y\cos u + \sin v)\,dx + (y\cos u + \sin u)\,dy}{x\cos v + y\cos u}.$$

260. Să se arate că funcţiile:

$$u = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$v = x + y + z,$$
$$w = xy + yz + zx,$$

sînt în dependenţă funcţională.

R. Pentru a fi în dependenţă funcţională, trebuie ca jacobianul lor să fie identic nul:

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ z+y & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}.$$

Adunăm linia a treia la linia întîi şi avem,

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 0.$$

Relaţia între u, v, w este $v^2 = u + 2w$.

261. Să se determine relaţia pe care trebuie să o satisfacă derivatele parţiale ale funcţiei $z = f(x, y)$, astfel ca z să nu depindă decît de produsul xy.

R. Trebuie ca $z = f(x, y)$ şi $u = xy$ să fie în dependenţă funcţională, adică determinantul

$$\frac{D(z, u)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ y & x \end{vmatrix} = 0,$$

sau, $xf'_x - yf'_y = 0$.

262. Se consideră funcţiile

$$u_1 = \cos\theta_1,$$
$$u_2 = \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2,$$
$$u_3 = \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_3.$$

Să se calculeze

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Iacobianul funcțiilor u_1, u_2, u_3 este

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(\theta_1, \theta_2, \theta_3)} = \begin{vmatrix} -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \cos\theta_1 \cos\theta_2 & -\sin\theta_1 \sin\theta_2 & 0 \\ \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 & \sin\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 & -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\sin^3\theta_1 \sin^2\theta_2 \sin\theta_3.$$

263. Să se arate că funcțiile

$$u = f\left(\frac{y-z}{x+z}\right), \qquad v = g\left(\frac{x+2y+z}{x+y}\right), \qquad w = h\left(\frac{x-y}{y+z}\right),$$

definite în $D \subset \mathbf{R}^3$, sînt în dependență funcțională.

R. Considerăm funcțiile inverse în $D' \subset D$

$$F(u) = \frac{y-z}{x+z}, \qquad G(v) = \frac{x+2y+z}{y+x}, \qquad H(w) = \frac{x-y}{y+z}$$

și se observă că avem

$$\left(\frac{y-z}{x+z}+1\right)\left(\frac{x+2y+z}{x+y}-1\right)\left(\frac{x-y}{y+z}+1\right) = 1,$$

deci funcțiile F, G, H sînt în dependență funcțională și avem

$$[F(u)+1]\ [G(v)-1)]\ [H(w)+1] = 1.$$

264. Să se arate că transformarea punctuală,

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad v = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad x^2+y^2 \neq 0$$

este inversabilă.

R. Transformarea este inversabilă, dacă $\frac{D(u, v)}{D(x, y)} \neq 0$

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2} \neq 0,$$

pentru orice $x^2+y^2 \neq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VIII

CONICE. SUPRAFEȚE RIGLATE ȘI DE ROTAȚIE. SFERA. CUADRICE

265. Se dau punctele $F(1,0)$, $F'(-1,0)$. Se cere să se afle locul geometric al punctelor M din plan care se bucură de proprietatea

$$MF + MF' = 4.$$

R. Considerăm un sistem de coordonate carteziene ortogonale xoy și fie $M(x, y)$ punctul curent al locului geometric. Avem

$$MF = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \qquad MF' = \sqrt{x+1)^2 + y^2}$$

astfel încît relația dată devine

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4.$$

Ridicînd la pătrat și efectuînd calculele, obținem

$$x^2 + y^2 - 7 = -\sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2}.$$

Ridicăm din nou la pătrat și reducem termenii asemenea. Obținem

$$3x^2 + 4y^2 - 12 = 0.$$

Împărțind cu 12, obținem în definitiv ecuația

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

care reprezintă o *elipsă* de semiaxe 2, $\sqrt{3}$ și focare F, F'.

266. Se dau punctele $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$. Se cere să se afle locul geometric al punctelor M din plan care au proprietatea

$$MF - MF' = \pm 2.$$

R. Fie $M(x, y)$ un punct curent al locului geometric. Deoarece

$$MF = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}, \qquad MF' = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

relația dată se scrie

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} - \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \pm 2.$$

Ridicăm la pătrat și reducem termenii asemenea. Obținem

$$x^2 + y^2 + 2 = \sqrt{(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2}.$$

Ridicînd din nou la pătrat și efectuînd calculele, rezultă

$$3x^2 - y^2 = 3.$$

Împărțim cu 3 și obținem în definitiv ecuația

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

care reprezintă o hiperbolă de semiaxe 1, $\sqrt{3}$ și focare F, F'.

267. Să se afle locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de dreapta $x = -3$ și de punctul $F(3, 0)$.

R. Dacă $M(x, y)$ este un punct curent al locului geometric și notăm cu N proiecția lui M pe dreapta D avînd ecuația

$$(D) \qquad x + 3 = 0$$

atunci relația geometrică pe care o satisface punctul M se deduce din enunț

$$MF = MN$$

Ținînd seama că punctul N are coordonatele $N(x + 3, y)$, rezultă

$$\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = x + 3.$$

Ridicăm la pătrat și efectuăm calculele. Obținem în definitiv ecuația

$$y^2 - 12x = 0$$

care reprezintă o *parabolă* de parametru 6, focar F și directoare D.

268. Să se afle punctele de intersecție ale elipsei

$$(E) \qquad \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$$

cu dreapta

$$(D) \qquad 3x + 2y - 3 = 0.$$

R. Pentru a afla punctele de intersecție ale elipsei cu dreapta dată se rezolvă sistemul format din ecuația elipsei și ecuația dreptei, deci

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0 \\ 3x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Din ecuația a doua rezultă $y = \frac{3}{2}(1 - x)$. Înlocuind în prima ecuație rezultă ecuația de gradul doi în x

$$10x^2 - 18x + 5 = 0$$

care are rădăcinile

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{31}}{10}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama că $y = \frac{3}{2}(1 - x)$, deducem

$$y_{1,2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 \mp \sqrt{31}}{10}.$$

Deci punctele de intersecţie ale elipsei E şi dreptei D sînt

$$A_1\left(\frac{9+\sqrt{31}}{10}, \frac{3}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{31}}{10}\right), \qquad A_2\left(\frac{9-\sqrt{31}}{10}, \frac{3}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{31}}{10}\right).$$

269. Să se scrie ecuaţiile parametrice ale elipsei

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

R. Dacă punem

$$\begin{cases} x = 4\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

atunci se observă că ecuaţia elipsei este identic verificată.

Observaţie. Dacă substituim în ecuaţiile parametrice de mai sus

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$$

atunci se ştie că avem formulele

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Obţinem astfel noi ecuaţii parametrice ale elipsei şi anume

$$\begin{cases} x = 4\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{6t}{1+t^2} \end{cases}, \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

270. Să se scrie ecuaţia tangentei în punctul $M_0(2, -1)$ la elipsa

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

R. În general, ecuaţia tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ la elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} = 1$$

se obţine din ecuaţia elipsei prin dedublare, deci este

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul nostru particular avem $a = 8$, $b = 2$, $x_0 = 2$, $y_0 = -1$. Rezultă $\frac{2x}{8} - \frac{y}{2} = 1$, sau efectuînd calculele, obținem în definitiv ecuația tangentei sub forma

$$x - 2y - 4 = 0.$$

271. Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul $M_0(3,2)$ la elipsa

$$(E) \qquad x^2 + 4y^2 - 4 = 0.$$

R. Ecuația dreptelor ce trece prin punctul $M_0(3, 2)$ este

$$(D) \qquad y - 2 = m(x - 3)$$

unde m este un parametru.

Intersectăm dreapta D cu elipsa E, adică înlocuim pe y scos din ecuația dreptei în ecuația elipsei. Obținem ecuația de gradul doi în x

$$(4m^2 + 1)\,x^2 - 8m(3m - 2)\,x + 12(3m^2 - 4m + 1) = 0.$$

Efectuînd calculele obținem ecuația de gradul doi în m

$$5m^2 - 12m + 3 = 0$$

care are rădăcinile

$$m_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{21}}{5}.$$

Ecuațiile celor două tangente duse prin M_0 la elipsa E sînt așadar

$$(T_1) \qquad y - 2 = \frac{6 - \sqrt{21}}{5}(x - 3)$$

$$(T_2) \qquad y - 2 = \frac{6 + \sqrt{21}}{5}(x - 3).$$

272. Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsa

$$2x^2 + y^2 - 6 = 0$$

paralele cu a doua bisectoare a axelor de coordonate.

R. Ecuația bisectoarei a doua este $y = -x$, iar ecuația dreptelor paralele cu a doua bisectoare este

$$(D) \qquad y = -x + \lambda$$

unde λ este un parametru, pe care-l vom determina din condiția ca dreapta D să fie tangentă la elipsă.

Intersectînd dreapta D cu elipsa, adică înlocuind pe y din ecuația dreptei în ecuația elipsei, obținem ecuația de gradul doi în x

$$3x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 6 = 0.$$

Pentru ca dreapta D să fie tangentă la elipsă trebuie ca realizantul acestei ecuații să fie nul, deci

$$\lambda^2 - 3(\lambda^2 - 6) = 0$$

de unde rezultă $\lambda^2 = 9$, deci $\lambda_{1,2} = \pm 3$.

Scanned with OKEN Scanner

Cele două tangente au prin urmare ecuațiile

$$(T_1) \qquad x + y - 3 = 0$$

$$(T_2) \qquad x + y + 3 = 0.$$

273. Să se determine hiperbola ale cărei focare sînt $F(0,4)$, $F'(0, -4)$ și care trece prin punctul $M_0(1, \sqrt{15})$. Să se afle vîrfurile acestei hiperbole.

R. Deoarece focarele sînt situate pe axa Oy, aceasta este axa transversă. Notînd cu b semiaxa transversală și ținînd seama că avem

$$a^2 = c^2 - b^2 = 16 - b^2$$

rezultă că ecuația hiperbolei are forma

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{16 - b^2} = 1.$$

Pentru determinarea lui b^2 punem condiția ca M_0 să aparțină hiperbolei, deci

$$\frac{15}{b^2} - \frac{1}{16 - b^2} - 1 = 0$$

de unde rezultă ecuația de gradul doi în b^2

$$b^4 - 32b^2 + 240 = 0$$

care are rădăcinile $b^2 = 20$, $b^2 = 12$.

Deoarece $16 - b^2 > 0$, luăm $b^2 = 12$, iar hiperbola cerută este

$$\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1.$$

Pentru a afla vîrfurile acestei hiperbole, o vom intersecta cu axele ei de simetrie, deci cu axele Ox, Oy. Se observă că axa Ox nu intersectează hiperbola în puncte reale, deci două vîrfuri sînt imaginare.

Intersectînd hiperbola cu axa Oy, obținem vîrfurile

$$V(0,2\sqrt{3}), \quad V'(0, -2\sqrt{3}).$$

274. Să se scrie ecuația tangentei și normalei în punctul $M_0(2, 5)$ la hiperbola

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

R. În general, ecuația tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ la hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se obține din ecuația hiperbolei prin dedublare, deci este

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul nostru particular, avem $a = \sqrt{2}$, $b = 5$, $x_0 = 2$, $y_0 = 5$.
Prin urmare,

$$(T) \qquad 5x - y - 5 = 0.$$

Normala este perpendiculara pe tangentă în punctul $M_0(2, 5)$. Deoarece panta tangentei T este $m = 5$, rezultă că panta normalei este

$$\mu = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{5}.$$

Prin urmare, ecuația normalei în punctul M_0 la hiperbola dată este

$$y - 5 = -\frac{1}{5}(x - 2)$$

sau efectuînd calculele

$$x + 5y - 27 = 0.$$

275. Să se scrie ecuațiile tangentelor la hiperbola

$$x^2 - y^2 = 1$$

paralele cu dreapta

$$y = \sqrt{2} \cdot x - 3.$$

R. Ecuația dreptelor paralele cu dreapta dată este

$$(D) \qquad y = \sqrt{2}x + \lambda.$$

Intersectînd dreapta D cu hiperbola, obținem ecuația de gradul doi în x

$$x^2 + 2\sqrt{2}\lambda x + \lambda^2 + 1 = 0.$$

Dreapta D va fi tangentă la hiperbolă dacă realizantul acestei ecuații este egal cu zero. Punînd această condiție, obținem ecuația

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

care are rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.
Cele două tangente vor avea prin urmare ecuațiile

$$(T_1) \qquad y = \sqrt{2}x + 1$$

$$(T_2) \qquad y = \sqrt{2}x - 1.$$

276. Să se scrie ecuațiile asimptotelor la hiperbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0.$$

R. Explicitînd ecuația hiperbolei, avem

$$y = \frac{2\varepsilon}{3}\sqrt{x^2 - 9}, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

de unde rezultă că această curbă are puncte reale dacă $x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

Se știe că asimptotele (oblice) sînt dreptele avînd ecuațiile

$$y = m_1 x + n_1, \qquad y = m_2 x + n_2$$

unde m, n sînt dați de formulele

$$m_1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x}, \quad n_1 = \lim_{x \to -\infty} (y - m_1 x), \quad m_2 = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}, \quad n_2 = \lim_{x \to \infty} (y - m_2 x)$$

Utilizînd aceste formule obținem succesiv

$$\begin{cases} m_1 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{2\varepsilon}{3}\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \dfrac{2\varepsilon}{3} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{x} = -\dfrac{2\varepsilon}{3} \\ n_1 = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2\varepsilon}{3}\sqrt{x^2 - 9} + \dfrac{2\varepsilon}{3} x \right) = \dfrac{2\varepsilon}{3} \lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - 9} + x) = \\ \qquad = \dfrac{2\varepsilon}{3} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} - x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{2\varepsilon}{3}\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \dfrac{2\varepsilon}{3} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|x|\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{x} = \dfrac{2\varepsilon}{3} \\ n_2 = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2\varepsilon}{3}\sqrt{x^2 - 9} - \dfrac{2\varepsilon}{3} x \right) = \dfrac{2\varepsilon}{3} \lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 - 9} - x) = \\ \qquad = \dfrac{2\varepsilon}{3} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-0}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0. \end{cases}$$

Deci cele două asimptote au ecuațiile

$$y = -\frac{2\varepsilon}{3} x, \qquad y = \frac{2\varepsilon}{3} x.$$

Ținînd seama că $\varepsilon = \pm 1$, rezultă că hiperbola dată are două asimptote, ale căror ecuații sînt

$$(D_1) \quad y = \frac{2}{3} x, \qquad (D_2) \quad y = -\frac{2}{3} x.$$

277. Să se determine punctele de intersecție a parabolei

$$y^2 = 18x$$

cu dreapta avînd ecuația

$$6x + y - 6 = 0.$$

R. Înlocuind pe y scos din ecuația dreptei în ecuația parabolei, obținem ecuația de gradul doi în x

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

care are rădăcinile $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, de unde rezultă $y_1 = -6$, $y_2 = 3$. Deci punctele de intersecție au coordonatele

$$P_1(2, -6), \qquad P_2\left(\frac{1}{2}, 3\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

278. Să se afle locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare între ele la parabola avînd ecuaţia

$$y^2 = -4x.$$

R. Fie $M(\alpha, \beta)$ punctul curent al locului geometric. Dreptele care trec prin punctul M au ecuaţia

$$(D) \qquad y - \beta = m(x - \alpha)$$

unde m este un parametru.

Intersectăm dreapta D cu parabola. Obţinem ecuaţia de gradul doi în x

$$m^2x^2 - 2(\alpha m^2 - \beta m - 2)\, x + \alpha^2 m^2 - 2\alpha\beta m + \beta^2 = 0.$$

Dreapta D este tangentă la parabolă dacă realizantul acestei ecuaţii este egal cu zero. Rezultă ecuaţia de gradul doi în m

$$\alpha m^2 - \beta m - 1 = 0$$

care determină pantele tangentelor duse din M la parabolă.

Cele două tangente vor fi perpendiculare, dacă avem

$$m_1 m_2 + 1 = 0$$

de unde rezultă, ţinînd seama de formulele lui Viète, că între coordonatele α, β ale punctului curent M există relaţia

$$\alpha = 1.$$

Locul geometric este deci o dreaptă, care reprezintă directoarea parabolei date.

279. Să se scrie ecuaţia tangentei în punctul $M_0\,(3, -3)$ la parabola

$$y^2 = 3x.$$

R. În general, ecuaţia tangentei în punctul $M_0\,(x_0, y_0)$ la parabola

$$y^2 = 2px$$

se obţine din ecuaţia parabolei prin dedublare, adică este

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

În cazul nostru particular, avem $p = \frac{3}{2}$, $x_0 = 3$, $y_0 = -3$, de unde rezultă

$$-3y = \frac{3}{2}(x + 3)$$

sau efectuînd calculele

$$x + 2y + 3 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

280. Să se scrie ecuația tangentei la parabola

$$(P) \qquad y^2 = -8x$$

paralelă cu prima bisectoare a axelor de coordonate.

R. Ecuația dreptelor paralele cu prima bisectoare este

$$(D) \qquad y = x + \lambda$$

unde λ este un parametru. Înlocuim pe y scos din D în P. Obținem ecuația

$$x^2 + 2(\lambda + 4)\, x + \lambda^2 = 0.$$

Punem condiția ca realizantul acestei ecuații să fie nul. Rezultă $\lambda = -2$, deci ecuația tangentei căutate este

$$(T) \qquad x - y - 2 = 0.$$

281. Să se găsească ecuația suprafeței cilindrice care are generatoarele paralele cu dreapta D dată prin ecuațiile

$$(D) \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

și curba directoare C dată prin ecuațiile

$$(C) \quad \begin{cases} x^2 - 2y^2 - z = 0 \\ x - 1 = 0. \end{cases}$$

R. Generatoarele paralele cu dreapta D sînt date de

$$(G) \quad \begin{cases} x + y = \lambda \\ z = \mu. \end{cases}$$

Punînd condiția ca ele să se sprijine pe curba C, trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - z = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

să fie compatibil. Eliminînd pe x, y, z între ecuațiile acestui sistem, obținem legătura

$$2(\lambda - 1)^2 + \mu - 1 = 0$$

numită condiția de compatibilitate a sistemului de mai sus.

Ecuația suprafeței se obține eliminînd parametrii λ, μ între ecuațiile

$$\begin{cases} x + y = \lambda \\ z = \mu \\ 2(\lambda - 1)^2 + \mu - 1 = 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se găseşte următoarea ecuaţie

$$2(x + y - 1)^2 + z - 1 = 0,$$

care reprezintă ecuaţia *suprafeţei cilindrice* căutate.

282. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice avînd curba directoare cercul

$$(C) \quad \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

şi generatoarele paralele cu o dreaptă de parametri directori (2, 1, 2).

R. Fie $M(\alpha, \beta, \gamma)$ un punct oarecare al cercului C, deci avem condiţiile

$$(K) \quad \begin{cases} 2\alpha - 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Ecuaţiile generatoarei duse prin punctul M sînt

$$\frac{x - \alpha}{2} = \frac{y - \beta}{1} = \frac{z - \gamma}{2} = t$$

unde t este un parametru real, de unde rezultă

$$\alpha = x - 2t, \qquad \beta = y - t, \qquad \gamma = z - 2t$$

Înlocuind în condiţiile (K), obţinem relaţiile

$$\begin{cases} 2(x - 2t) - 3(y - t) + z - 2t = 0 \\ (x - 2t)^2 + (y - t)^2 + (z - 2t)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Eliminînd pe t între aceste relaţii, găsim ecuaţia suprafeţei cilindrice

$$(x - 6y + 2z)^2 + (2x - 6y + z)^2 + (4x - 6y - z)^2 - 9 = 0.$$

283. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice avînd generatoarele paralele cu dreapta de parametri directori (—1, 3, —2) şi curba directoare

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0; \qquad t \in [0, 2\pi)$$

R. Ecuaţiile unei generatoare sînt

$$\frac{X - x}{-1} = \frac{Y - y}{3} = \frac{Z - z}{-2} = \rho$$

unde ρ este un parametru real, de unde rezultă

$$X = -\rho + \cos t, \quad Y = 3\rho + \sin t, \quad Z = -2\rho$$

care reprezintă ecuaţiile parametrice ale suprafeţei cilindrice căutate.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obține ecuația carteziană, eliminăm pe t, ρ între aceste trei ecuații. Rezultă

$$\left(X-\frac{Z}{2}\right)^2+\left(Y+\frac{3}{2}Z\right)^2=1.$$

284. Să se scrie ecuația conului cu vîrful în origine și curba directoare

$$(C)\quad \begin{cases} x^2+y^2+(z-5)^2-9=0 \\ z-4=0 \end{cases}$$

R. Ecuațiile generatoarei sînt

$$(G)\quad \begin{cases} x=\lambda z \\ y=\mu z \end{cases}$$

Aceasta trebuind să se sprijine pe curba directoare, este necesar ca sistemul

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-5)^2-9=0 \\ z-4=0 \\ x=\lambda z \\ y=\mu z \end{cases}$$

să fie compatibil. Relația de compatibilitate este

$$2(\lambda^2+\mu^2)-1=0$$

iar ecuația suprafeței conice se obține eliminînd parametrii λ, μ între ecuațiile

$$\begin{cases} x=\lambda z \\ y=\mu z \\ 2(\lambda^2+\mu^2)-1=0 \end{cases}$$

Rezultă

$$2(x^2+y^2)-z^2=0.$$

285. Să se afle ecuația conului cu vîrful $V(0, 0, 8)$ și curba directoare

$$(C)\quad \begin{cases} y^2-4x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

R. Fie punctul $M(\alpha, \beta, \gamma)$ pe curba C, deci avem condițiile

$$\begin{cases} \beta^2-4\alpha=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

Ecuațiile generatoarei sînt

$$(G)\qquad x=\frac{\alpha}{1+\lambda},\qquad y=\frac{\beta}{1+\lambda},\qquad z=\frac{\gamma+8\lambda}{1+\lambda}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde λ este un parametru real. Punctul $M(\alpha, \beta, \gamma)$ găsindu-se și pe generatoare și pe curba directoare, trebuie ca să satisfacă sistemul

$$\begin{cases} \beta^2 - 4\alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ x = \dfrac{\alpha}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{\beta}{1+\lambda} \\ z = \dfrac{\gamma + 8\lambda}{1+\lambda} \end{cases}$$

de cinci ecuații. Eliminînd parametrii α, β, γ, λ între aceste ecuații, obținem

$$x(z-8) + 2y^2 = 0$$

care este ecuația conului căutat.

286. Să se determine ecuația suprafeței pe care o generează o dreaptă ce se mișcă paralel cu planul xOy, se sprijină pe axa Oz și pe parabola

$$(C) \quad \begin{cases} z = ax^2 + bx + c \\ y = p \end{cases}$$

R. Ecuațiile unei drepte variabile sînt

$$(G) \quad \begin{cases} y = \lambda x \\ z = \mu \end{cases}$$

Generatoarea G sprijinindu-se pe curba C, următorul sistem

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ z = \mu \\ z = ax^2 + bx + c \\ y = p \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Relația de compatibilitate între λ, μ este

$$\lambda^2\mu = c\lambda^2 + bp\lambda + ap^2.$$

Pentru a obține ecuația suprafeței eliminăm parametrii λ, μ între ecuațiile

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ z = \mu \\ \lambda^2\mu = c\lambda^2 + bp\lambda + ap^2 \end{cases}$$

Se găsește

$$y^2(z-c) = px(apx + by).$$

Scanned with OKEN Scanner

287. Prin punctele parabolei

$$(C) \quad \begin{cases} y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

se duc drepte care întîlnesc dreptele

$$(D_1) \qquad y = 0, \qquad x + 1 = 0$$

$$(D_2) \qquad x - 1 = y = z$$

Să se determine ecuația suprafeței pe care sînt așezate dreptele variabile.

R. Ecuațiile unei drepte variabile care se sprijină pe D_1, D_2 sînt

$$(G) \quad \begin{cases} y - x + 1 = \lambda(y - z) \\ x + 1 = \mu y \end{cases}$$

unde λ, μ sînt parametri. Pentru ca generatoarea G să se sprijine pe curba C trebuie ca să fie compatibil următorul sistem de ecuații

$$\begin{cases} y - x + 1 = \lambda(y - z) \\ x + 1 = \mu y \\ z = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Eliminînd pe x, y, z se găsește relația de compatibilitate între λ, μ și anume

$$(\mu - \lambda + 1)^2 - 2(\lambda + \mu - 1) = 0$$

Ecuația suprafeței se obține eliminînd parametrii λ, μ între ecuațiile

$$\begin{cases} y - x + 1 = \lambda(y - z) \\ x + 1 = \mu y \\ (\mu - \lambda + 1)^2 - 2(\lambda + \mu - 1) = 0 \end{cases}$$

Rezultă astfel

$$(2xy - xz - yz - z)^2 = 2y(y - z)(yz - xz + 2y - z).$$

288. Să se determine ecuația suprafeței generate de o dreaptă D care se sprijină pe dreptele

$$(D_1) \qquad x = 2, \qquad y = 1, \qquad (D_2) \quad y = -1, \quad z = 1$$

și rămîne paralelă cu planul

$$(P) \qquad -x + 2y + z + 1 = 0$$

R. Dreapta D este determinată de punctele $A(2, 1, \lambda)$, $B(\mu, -1, 1)$, unde λ, μ sînt parametri. Scriind că dreapta AB rămîne paralelă cu planul P, rezultă condiția

$$\lambda + \mu + 1 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile canonice ale dreptei AB sînt

$$(AB) \qquad \frac{x-2}{\mu-2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-\lambda}{1-\lambda}.$$

Eliminînd apoi parametrii λ, μ între ecuațiile

$$\begin{cases} \lambda+\mu+1=0 \\ \dfrac{x-2}{\mu-2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-\lambda}{1-\lambda} \end{cases}$$

obținem ecuația suprafeței căutate și anume

$$2y^2-xy+yz-x+y-z+1=0.$$

289. Să se găsească ecuația suprafeței de rotație, generată de curba

$$(C) \quad \begin{cases} x^2-2y^2+z^2-5=0 \\ x+z+3=0 \end{cases}$$

prin rotirea ei în jurul axei

$$(D) \qquad x=y=z$$

R. Ecuațiile cercului generator sînt

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\lambda^2 \\ x+y+z=\mu \end{cases}$$

care trebuind să se sprijine pe curba C, sistemul format din ecuațiile cercului Γ și ale curbei C, adică

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\lambda^2 \\ x+y+z=\mu \\ x^2-2y^2+z^2-5=0 \\ x+z+3=0 \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Eliminînd pe x, y, z între ecuațiile acestui sistem, obținem relația de compatibilitate între parametrii λ, μ. Avem

$$\lambda^2-3(\mu-3)^2-5=0$$

Ecuația suprafeței se obține eliminînd pe λ, μ între ecuațiile cercului Γ și relația de compatibilitate, adică între ecuațiile sistemului

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\lambda^2 \\ x+y+z=\mu \\ \lambda^2-3(\mu-3)^2-5=0 \end{cases}$$

Rezultă astfel

$$x^2+y^2+z^2-3(x+y+z-3)^2-5=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

290. Să se găsească ecuația suprafeței de rotație obținute prin rotirea elipsei

$$(C)\quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0 \end{cases}$$

în jurul axei Oz.

R. Cercul generator Γ are ecuațiile

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} x^2+y^2=\lambda^2 \\ z=\mu \end{cases}$$

Punînd condiția ca cercul Γ să se sprijine pe curba C, trebuie ca sistemul

$$\begin{cases} x^2+y^2=\lambda^2 \\ z=\mu \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0 \end{cases}$$

să fie compatibil. Relația de compatibilitate este

$$\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{c^2}-1=0$$

iar ecuația suprafeței de rotație se obține eliminînd λ, μ între ecuațiile

$$\begin{cases} x^2+y^2=\lambda^2 \\ z=\mu \\ \frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

Rezultă astfel ecuația

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

care reprezintă un elipsoid de rotație.

291. Să se afle ecuația suprafeței de rotație generate de un cerc în jurul unei axe situate în planul său și pe care n-o traversează.

R. Fie cercul în planul xOz, cu centrul pe axa Ox în punctul $A(a, 0,0)$ și raza R, $(R < a)$. Ecuațiile acestui cerc sînt

$$(C)\quad \begin{cases} (x-a)^2+z^2-R^2=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Presupunem că axa de rotație este axa Oz, deci cercul generator are ecuațiile

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} x^2+y^2=\lambda^2 \\ z=\mu \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Relația de compatibilitate se obține eliminînd λ, μ între ecuațiile

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda^2 \\ z = \mu \\ (x - a)^2 + z^2 - R^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

și este

$$(\lambda - a)^2 + \mu^2 - R^2 = 0$$

Eliminînd apoi λ, μ între ecuațiile sistemului

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \lambda^2 \\ z = \mu \\ (\lambda - a)^2 + \mu^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$

obținem ecuația suprafeței de rotație numită tor

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$$

292. Să se determine ecuația sferei care trece prin punctele

$$P_1(0, 0, 0), \quad P_2(1, 0, 0), \quad P_3(0, 1, 0), \quad P_4(0, 0, 1).$$

R. Ecuația generală a sferei este

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0.$$

Punînd condiția ca cele patru puncte să fie situate pe sferă, avem sistemul

$$\begin{cases} q = 0 \\ m + q = -1 \\ n + q = -1 \\ p + q = -1 \end{cases}$$

de unde rezultă imediat $m = n = p = -1$, $q = 0$. Deci sfera căutată are ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$$

Observație. Ecuația sferei mai poate fi determinată și astfel: dacă $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, sînt patru puncte necoplanare, atunci se știe că ecuația sferei ce trece prin aceste puncte este

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul nostru avem

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dezvoltînd acest determinant, obținem aceeași ecuație și anume:

$$x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$$

293. Să se afle coordonatele centrului și raza sferei avînd ecuația

$$2x^2+2y^2+2z^2-5x+2y+3z+2=0$$

R. Pentru aflarea coordonatelor și raza sferei date vom scrie ecuația sa sub forma

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

În acest scop împărțim mai întîi cu 2 ecuația sferei și obținem

$$x^2+y^2+z^2-\frac{5}{2}x+y+\frac{3}{2}z+1=0$$

Ținînd apoi seama că avem

$$x^2-\frac{5}{2}x=\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}, \quad y^2+y=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4},$$

$$z^2+\frac{3}{2}z=\left(z+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}$$

rezultă că ecuația sferei poate fi pusă sub forma

$$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{22}{16}$$

de unde rezultă centrul $C\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ și raza $R=\frac{\sqrt{22}}{4}$.

294. Să se scrie ecuația sferei care are centrul $C(-2, 1, -3)$ și este tangentă la planul

$$(P) \qquad x-2y+2z-3=0.$$

R. Orice sferă cu centrul $C(-2, 1, -3)$ are ecuația de forma

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=R^2$$

Pentru a afla pe R ținem seama că sfera trebuie să fie tangentă la planul P, deci că raza sferei este egală cu distanța de la centrul sferei la planul P. Cum distanța punctului C la planul P este

$$d=\frac{|1-(-2)-2\cdot 1+2\cdot(-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{13}{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că ecuația sferei este

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\frac{169}{9}$$

care se mai poate scrie și sub forma

$$9x^2+9y^2+9z^2+36x-18y+54z-43=0.$$

295. Să se afle punctele de intersecție a dreptei

$$(D)\qquad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-6}{-5}$$

cu sfera de ecuație

$$(S)\qquad x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$$

R. Pentru a afla punctele de intersecție ale unei drepte cu o sferă se rezolvă sistemul format din ecuațiile dreptei și ecuația sferei.

Notînd cu t valoarea comună a rapoartelor din ecuațiile dreptei D, avem

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-6}{-5}=t$$

de unde rezultă

$$x=t+1,\quad y=2(t+1),\quad z=-5t+6$$

Înlocuind aceste valori în ecuația sferei, obținem ecuația

$$t(t-1)=0$$

care are rădăcinile $t_1=0$, $t_2=1$. Notînd cu $P_1(x_1, y_1, z_1)$ punctul corespunzător lui $t_1=0$ și cu $P_2(x_2, y_2, z_2)$ punctul corespunzător lui $t_2=1$, găsim

$$P_1(1, 2, 6),\quad P_2(2, 4, 1).$$

296. Să se afle coordonatele centrului și raza cercului de secțiune dintre sfera (S) și planul (P), unde

$$(S)\qquad x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z-5=0$$

$$(P)\qquad 2x+y-2z-2=0$$

R. Ecuațiile cercului C de secțiune dintre sferă și plan sînt date de sistemul format din ecuația sferei S și a planului P, deci

$$(C)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z-5=0 \\ 2x+y-2z-2=0 \end{cases}$$

Centrul ω al cercului C este piciorul perpendicularei duse din centrul O $(3, -1, 1)$ al sferei S pe planul P. Ecuațiile dreptei $O\omega$ sînt

$$(O\omega)\qquad \frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Intersectînd dreapta $O\omega$ cu planul P, adică rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2} \\ 2x + y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

găsim $\omega\left(\frac{25}{9}, -\frac{10}{9}, \frac{11}{9}\right)$.

Dacă notăm acum cu d distanța de la O la planul P, adică distanța dintre punctele O, ω avem

$$d = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}$$

Dacă scriem ecuația sferei S sub forma

$$(S) \qquad (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 16$$

rezultă că raza sa este $R = 4$ și deoarece $d < R$, înseamnă că cercul C este real. Notînd cu r raza cercului C, avem

$$r^2 = R^2 - d^2 = 16 - \frac{1}{9} = \frac{143}{9}$$

de unde rezultă că $r = \frac{\sqrt{143}}{3}$.

297. Să se scrie ecuația planului tangent în punctul $M_0(1, 2, -1)$ la sfera

$$(S) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y + z - 4 = 0$$

R. Punctul M_0 este situat pe sfera S deoarece coordonatele sale verifică ecuația sferei. În general, ecuația planului tangent la sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de pe sferă este

$$x_0x + y_0y + z_0z - a(x + x_0) - b(y + y_0) - c(z + z_0) + d = 0$$

adică se obține din ecuația sferei prin dedublare.

În cazul nostru particular, avem

$$1 \cdot x + 2 \cdot y + (-1)z - \frac{3}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(y+2) + \frac{1}{2}(z-1) - 4 = 0$$

Efectuînd calculele se obține în definitiv

$$x - 5y + z + 10 = 0$$

298. Să se determine ecuațiile planelor tangente la sfera

$$(S) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 6y - 2z + 19 = 0$$

paralele cu planul

$$(P) \qquad 3x - y - z + 1 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

R. În general, ecuațiile planelor tangente la sfera

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

paralele cu planul

$$Ax+By+Cz+D=0$$

sînt următoarele

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=\varepsilon R\sqrt{A^2+B^2+C^2},\qquad(\varepsilon=\pm1)$$

În cazul nostru $a=5$, $b=-3$, $c=1$, $R=4$, $A=3$, $B=-1$, $C=-1$ deci avem

$$3(x-5)-(y+3)-(z-1)=\pm4\sqrt{3^2+1^2+1^2}$$

Efectuînd calculele, rezultă că ecuațiile

$$3x-y-z-17\pm4\sqrt{11}=0.$$

299. Să se scrie ecuația sferei de rază 3, tangentă în punctul $M(1,1,2)$ la planul

$$(P)\qquad 2x-2y+z-2=0.$$

R. Centrul sferei este situat pe perpendiculara Δ dusă în M pe planul P la distanța 3 de punctul M. Cum punctele situate la distanța 3 de punctul M aparțin sferei S cu centrul M și raza 3, centrul sferei cerute este la intersecția sferei S cu dreapta Δ. Avem

$$(S)\qquad x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0$$

$$(\Delta)\qquad \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1} \end{cases}$$

găsim centrele sferelor căutate $C_1(3,-1,3)$, $C_2(-1,3,1)$. Ecuațiile lor vor fi deci

$$(S_1)\qquad x^2+y^2+z^2-6x+2y-6z+10=0$$

$$(S_2)\qquad x^2+y^2+z^2+2x-6y-2z+2=0$$

300. Să se afle punctele de intersecție ale dreptei

$$(D)\qquad \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

cu elipsoidul

$$(E)\qquad x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-1=0$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Notînd cu ρ valoarea comună a rapoartelor din ecuațiile dreptei D, avem

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \rho$$

de unde rezultă

$$x = \rho, \qquad y = 2\rho, \qquad z = 3\rho$$

Înlocuind în ecuația elipsoidului aceste valori, rezultă ecuația

$$3\rho^2 - 1 = 0$$

care are rădăcinile $\rho_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\rho_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Notînd apoi cu P_1, P_2 punctele corespunzătoare lui ρ_1, ρ_2 respectiv, deducem

$$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}\right), \qquad P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

301. Să se arate că hiperboloidul cu o pînză

$$(H_1) \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0$$

poate fi generat de elipsa mobilă

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

care se deplasează paralel cu ea însăși și se sprijină pe hiperbola fixă

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} - z^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

R. Elipsa sprijinindu-se pe hiperbolă, înseamnă că sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \lambda \\ z = \mu \\ \frac{x^2}{9} - z^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Relația de compatibilitate este

$$\lambda - \mu^2 - 1 = 0.$$

Ecuația suprafeței astfel generate se obține eliminînd λ, μ din sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \lambda \\ z = \mu \\ \lambda - \mu^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă astfel

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2-1=0$$

adică tocmai ecuația *hiperboloidului cu o pînză* dat.

302. Să se arate că intersecția elipsoidului

$$(E)\qquad \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}-1=0$$

cu sfera

$$(S)\qquad x^2+y^2+z^2-25=0$$

este un cerc.

R. Intersecția elipsoidului cu sfera este dată de sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{16}-1=0\\[2ex] \dfrac{x^2+y^2+z^2}{25}-1=0\end{cases}$$

Acest sistem este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-25=0\\ 16x\pm 13z=0\end{cases}$$

format din ecuația sferei și din ecuația obținută scăzînd membru cu membru ecuația sferei și a elipsoidului. Deoarece ecuațiile

$$(P)\qquad 16x\pm 13z=0$$

reprezintă plane ce trec prin centrul sferei S, rezultă că intersecțiile sferei cu planele P, ceea ce este echivalent cu intersecțiile sferei și elipsoidului E sînt cercuri, ceea ce trebuia demonstrat.

303. Să se afle ecuația suprafeței generate de elipsa mobilă

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=\lambda\\[2ex] z=\mu\end{cases}$$

care se deplasează paralel cu ea însăși și se deformează, sprijinindu-se pe hiperbola fixă

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{z^2}{9}+1=0\\[2ex] y=0\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Deoarece elipsa se sprijină pe hiperbolă, înseamnă că sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = \lambda \\ z = \mu \\ \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{9} + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

este compatibil. Relația de compatibilitate este următoarea

$$\lambda - \frac{\mu^2}{9} + 1 = 0$$

Eliminînd apoi parametrii λ, μ între ecuațiile sistemului

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = \lambda \\ z = \mu \\ \lambda - \frac{\mu^2}{9} + 1 = 0 \end{cases}$$

rezultă ecuația suprafeței căutate

$$(H_2) \qquad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} + 1 = 0$$

care este un *hiperboloid cu două pînze.*

304. Să se arate că intersecția elipsoidului

$$(E) \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{24} - 1 = 0$$

cu paraboloidul eliptic

$$(P_e) \qquad 2z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}$$

este o elipsă situată într-un plan paralel cu planul xOy și o elipsă imaginară.

R. Intersecția cuadricelor E, P_e este dată de sistemul

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{24} - 1 = 0 \\ 2z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \end{cases}$$

Din aceste ecuații deducem

$$z^2 + 48z - 24 = 0$$

de unde rezultă

$$z = \sqrt{24}\,(-\sqrt{24} \pm 5)$$

Scanned with OKEN Scanner

Intersecția cuadricelor E, P_e este dată acum de sistemele

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=2\sqrt{24}\,(-\sqrt{24}+5) \\ z=\sqrt{24}\,(-\sqrt{24}+5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=-\sqrt{24}\,(\sqrt{24}+5) \\ z=-\sqrt{24}\,(\sqrt{24}+5) \end{cases}$$

care reprezintă două elipse. Prima elipsă este o elipsă reală situată într-un plan paralel cu planul xOy, iar a doua este o elipsă imaginară, deoarece nu există valori reale ale lui x și y care să verifice ecuațiile sale.

305. Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pînză

$$(H_1) \qquad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2-1=0$$

care trec prin punctul $M_0(6, -2, 2)$ și să se verifice că sînt concurente.

R. Ecuația hiperboloidului dat poate fi pusă sub forma

$$\left(\frac{x}{3}+z\right)\left(\frac{x}{3}-z\right)=\left(1+\frac{y}{2}\right)\left(1-\frac{y}{2}\right)$$

astfel încît cele două familii de generatoare rectilinii au ecuațiile

$$(G_\lambda) \qquad \begin{cases} \frac{x}{3}+z=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{y}{2}\right) \\ \frac{x}{3}-z=\lambda\left(1-\frac{y}{2}\right) \end{cases}$$

$$(G_\mu) \qquad \begin{cases} \frac{x}{3}+z=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{y}{2}\right) \\ \frac{x}{3}-z=\mu\left(1+\frac{y}{2}\right) \end{cases}$$

Punînd condiția ca generatoarele să treacă prin punctul dat, obținem $\lambda=0$, $\mu=\frac{1}{2}$, de unde rezultă că generatoarele rectilinii au ecuațiile

$$(D_1) \qquad \begin{cases} y+2=0 \\ x-3z=0 \end{cases}$$

$$(D_2) \qquad \begin{cases} x+3y+3z+6=0 \\ 4x-3y-12z-6=0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

A arăta că dreptele D_1, D_2 sînt concurente, revine a arăta că sistemul

$$\begin{cases} y + 2 = 0 \\ x - 3z = 0 \\ x + 3y + 3z - 6 = 0 \\ 4x - 3y - 12z - 6 = 0 \end{cases}$$

este compatibil. Să luăm ca determinant principal pe

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

Singurul determinant caracteristic este

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -6 \\ 4 & -3 & -12 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -18 \\ 4 & -3 & -12 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -18 \\ 4 & -12 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 18 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

Deoarece $\Delta_c = 0$, rezultă că dreptele sînt concurente. Rezolvînd sistemul, găsim $x = 6$, $y = -2$, $z = 2$, deci tocmai coordonatele punctului M_0.

306. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$(P_h) \qquad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$$

care trec prin punctul $M_0(8, 2, 3)$ de pe paraboloid.

R. Ecuaţia paraboloidului dat se mai poate scrie şi astfel

$$\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) = z$$

de unde rezultă că cele două familii de generatoare rectilinii au ecuaţiile

$$(G_\lambda) \qquad \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \lambda z \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$(G_\mu) \qquad \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{1}{\mu} \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = \mu z \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Punem condiția ca generatoarele să treacă prin punctul dat. Obținem

$$\begin{cases} \frac{8}{4}+\frac{2}{2}=3\lambda \\ \frac{8}{4}-\frac{2}{2}=\frac{1}{\lambda} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{8}{4}+\frac{2}{2}=\frac{1}{\mu} \\ \frac{8}{4}-\frac{2}{2}=3\mu \end{cases}$$

de unde rezultă $\lambda = 1$, $\mu = \frac{1}{3}$. Generatoarele rectilinii au deci ecuațiile

$$(D_1) \qquad \begin{cases} x+2y-4z=0 \\ x-2y=4 \end{cases}$$

$$(D_2) \qquad \begin{cases} x+2y=12 \\ 3x-6y-4z=0 \end{cases}$$

307. Să se afle unghiul generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pînză

$$(H_1) \qquad x^2+y^2-z^2=1$$

care trec prin punctul $M_0(1, 1, 1)$.

R. Ecuația hiperboloidului se mai poate scrie

$$(x+z)(x-z)=(1+y)(1-y)$$

deci generatoarele rectilinii au ecuațiile

$$(G_\lambda) \qquad \begin{cases} x+z=\lambda(1+y) \\ x-z=\frac{1}{\lambda}(1-y) \end{cases}$$

$$(G_\mu) \qquad \begin{cases} x+z=\frac{1}{\mu}(1-y) \\ x-z=\mu(1+y) \end{cases}$$

Prin punctul dat M_0 trece cîte o generatoare din fiecare familie.

Înlocuind $x=y=z=1$ în aceste patru ecuații, obținem imediat $\lambda = 1$ și $\mu = 0$. Deci generatoarele rectilinii ce trec prin M_0 au ecuațiile

$$(D_1) \qquad \begin{cases} x+z=1+y \\ x-z=1-y \end{cases}, \qquad (D_2) \begin{cases} y-1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

Pentru a afla parametrii directori ai dreptelor D_1, D_2 vom scrie ecuațiile acestei drepte sub formă canonică. În ceea ce privește dreapta D_2 este evident că putem scrie

$$(D_2) \qquad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$$

deci notînd cu $\vec{V}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ vectorul director al dreptei D_2, avem $\vec{V}_2 = (1, 0, 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a scrie ecuațiile canonice ale dreptei D_1 luăm pe această dreaptă punctele $A(1, 0, 0)$, $M_0(1, 1, 1)$ și atunci avem

$$(D_1) \qquad \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

Rezultă că notînd cu $\vec{V}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ vectorul director al lui D_1, avem $\vec{V}_1 = (0, 1, 1)$.

Notînd apoi cu θ unghiul format de dreptele D_1, D_2, avem succesiv

$$\cos\theta = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} = \frac{1}{2}$$

de unde rezultă $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IX

GEOMETRIA DIFERENȚIALĂ A CURBELOR ȘI SUPRAFEȚELOR

308. Se dă un cerc de rază a. Fie A un punct pe cerc și O punctul diametral opus lui A. O secantă oarecare dusă prin O taie cercul în punctul C și tangenta în A la cerc în punctul B. Să se afle locul geometric al punctului P astfel încît $BP = OC$.

R. Notăm cu φ unghiul variabil format de secanta OC cu sensul pozitiv al axei Ox și cu ρ lungimea segmentului OP.

Coordonatele punctului P sînt

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

Deoarece ρ variază odată cu φ, trebuie să exprimăm pe ρ în funcție de φ. Avem

$$\rho = OP = OB - BP = \frac{2a}{\cos \varphi} - 2a \cos \varphi = 2a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

Relația

$$\rho = 2a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

exprimă ecuația curbei în coordonate polare.

Înlocuind pe ρ în expresiile lui x și y, obținem relațiile

$$\begin{cases} x = 2a \sin^2 \varphi \\ y = 2a \dfrac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi} \end{cases}$$

care constituie ecuațiile parametrice ale curbei numită *cisoida lui Diocles* (fig. 24).

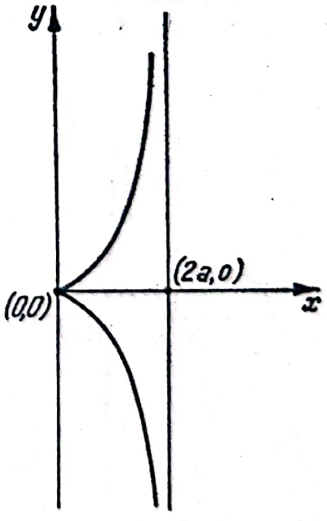

Fig. 24

Să eliminăm între aceste ecuații parametrul φ. Avem

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \sin^2\varphi = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

de unde rezultă

$$x = 2a\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

Efectuînd calculele, obținem ecuația implicită a cisoidei

$$x(x^2+y^2) - 2ay^2 = 0$$

De aici rezultă ecuația explicită a cisoidei lui Diocles

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}, \quad x(2a-x) > 0$$

309. Să se scrie ecuațiile parametrice ale strofoidei (fig. 25)

$$x(x^2+y^2) + a(x^2-y^2) = 0$$

R. Curba trece prin originea $O(0, 0)$. Ecuația unei drepte oarecare ce trece prin O este

$$y = tx$$

unde t este panta dreptei. Înlocuim pe y din ecuația dreptei în ecuația curbei

$$x^3(1+t^2) + ax^2(1-t^2) = 0$$

Rezultă astfel ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = \dfrac{a(t^2-1)}{t^2+1} \\ y = \dfrac{at(t^2-1)}{t^2+1}, \quad t \in R \end{cases}$$

Observație. Se vede că x și y sînt funcții raționale de t. De aceea se spune că strofoida este o curbă unicursală sau rațională, numind astfel o curbă care admite o reprezentare parametrică rațională a coordonatelor unui punct oarecare de pe curbă în funcție de un parametru.

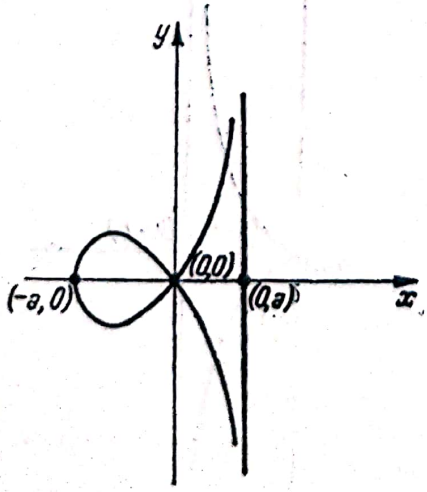

Fig. 25

310. Să se găsească punctele de intersecție dintre curba C și dreapta D

$$(C) \qquad x = t^3 - 3t, \quad y = t^2 - 3, \quad t \in R$$

$$(D) \qquad x + 2y + 6 = 0$$

R. Înlocuind în ecuația dreptei D pe x, y cu expresiile pe care le au în ecuațiile parametrice ale curbei C, obținem ecuația

$$t^3 + 2t^2 - 3t = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

care are rădăcinile

$$t_1 = 0, \quad t_2 = -3, \quad t_3 = 1$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile parametrice ale curbei C, rezultă că dreapta D intersectează curba C în punctele

$$M_1(0, -3), \quad M_2(-18,6), \quad M_3(-2, -2).$$

311. Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din originea $O(0, 0)$ la curba

$$(C) \qquad x = \frac{t+2}{3t+4}, \quad y = \frac{4t+3}{2t+1}, \quad 3t + 4 \neq 0, \quad 2t + 1 \neq 0.$$

R. Eliminînd pe t între aceste ecuații, avem

$$t = \frac{2(1-2x)}{3x-1}$$

Înlocuind pe t în expresia lui y, obținem ecuația explicită a curbei

$$(C) \qquad y = \frac{7x-5}{5x-3}, \quad 5x - 3 \neq 0$$

Ecuația unei drepte oarecare ce trece prin O este

$$(D) \qquad y = mx$$

Intersectăm dreapta D cu curba C și rezultă ecuația

$$5mx^2 - (3m + 7)\, x + 5 = 0$$

Pentru ca dreapta D să fie tangentă la curba C, trebuie ca realizantul acestei ecuații de gradul doi în x să fie nul

$$(3m + 7)^2 - 100m \equiv 9m^2 - 58m + 49 = 0$$

Rezolvînd această ecuație de gradul doi în m, obținem rădăcinile

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = \frac{49}{9}$$

Înlocuim în (D) și obținem ecuațiile tangentelor

$$(T_1) \qquad y = x$$

$$(T_2) \qquad y = \frac{49}{9}\, x$$

312. Să se scrie ecuațiile tangentelor la curba

$$(C) \qquad x^3 - y^3 - 3x^2 = 0$$

paralele cu prima bisectoare a axelor de coordonate.

R. Tangentele căutate au ecuațiile

$$(D) \qquad y = x + \lambda$$

Pentru a determina pe λ scriem că dreapta D taie curba C în puncte confundate. Ecuația care dă abscisele punctelor de intersecție dintre dreaptă și curbă este

$$3(\lambda + 1)\, x^2 + 3\lambda^2 x + \lambda^3 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția de tangență este

$$\Delta \equiv 9\lambda^4 - 12\lambda^3(\lambda + 1) = -3\lambda^3(\lambda + 4) = 0$$

care are rădăcinile

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -4.$$

Înlocuind în (D) obținem ecuațiile tangentelor cerute

(T_1) $\qquad y = x$

(T_2) $\qquad y = x - 4$

313. Să se scrie ecuația tangentei și normalei în punctul $M_0(1, 1)$ la curba

(C) $\qquad y = \dfrac{4x}{2x - 1}, \quad 2x - 1 \neq 0$

R. Ecuațiile tangentei și normalei sînt respectiv

(T) $\qquad y - 1 = y'(1)\,(x - 1)$

(N) $\qquad y - 1 = -\dfrac{1}{y'(1)}(x - 1)$

Avem apoi

$$y'(x) = \frac{2}{(2x - 1)^2}, \quad y'(1) = 2$$

Ecuațiile tangentei și normalei se scriu deci

(T) $\qquad y - 1 = 2(x - 1)$

(N) $\qquad y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 1)$

sau efectuînd calculele

(T) $\qquad 2x - y - 1 = 0$

(N) $\qquad x + 2y - 3 = 0$

314. Să se scrie ecuația tangentei și normalei în punctul $M_0\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ la curba

(C) $\qquad x = \dfrac{t - 2}{3t - 4}, \quad y = \dfrac{4t - 3}{2t - 1}, \quad 3t - 4 \neq 0, \quad 2t - 1 \neq 0$

R. Înlocuim pe x cu $\frac{1}{2}$ și pe y cu 3 în ecuațiile curbei C

$$\frac{1}{2} = \frac{t - 2}{3t - 4}, \quad 3 = \frac{4t - 3}{2t - 1}$$

Aceste ecuații au soluția comună $t_0 = 0$, deci avem $M_0(t_0 = 0)$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile tangentei și normalei sînt

$$(T) \qquad \frac{x-\frac{1}{2}}{x'(0)} = \frac{y-3}{y'(0)}$$

$$(N) \qquad \left(x-\frac{1}{2}\right)x'(0) + (y-3)\,y'(0) = 0$$

Avem apoi

$$x'(t) = \frac{2}{(3t-4)^2}, \quad y'(t) = \frac{2}{(2t-1)^2}, \quad x'(0) = \frac{1}{8}, \quad y'(0) = 2$$

Ecuațiile tangentei și normalei devin

$$(T) \qquad \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = \frac{y-3}{2}$$

$$(N) \qquad \left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{8} + (y-3)\,2 = 0$$

sau după efectuarea calculelor

$$(T) \qquad 16x - y - 5 = 0$$

$$(N) \qquad 2x + 32y - 97 = 0$$

315. Să se scrie ecuația tangentei și normalei în punctul $M_0(2, -1)$ la curba

$$(C) \qquad x^3 + 3x^2y - y^2 - 2x + 9 = 0$$

R. Notînd

$$F(x, y) \equiv x^3 + 3x^2y - y^2 - 2x + 9$$

ecuațiile tangentei și normalei sînt

$$(T) \qquad (x-2)\,F'_x(2, -1) + (y+1)\,F'_y(2, -1) = 0$$

$$(N) \qquad \frac{x-2}{F'_x(2, -1)} = \frac{y+1}{F'_y(2, -1)}$$

Avem apoi

$$F'_x(x, y) = 3x^2 + 6xy - 2, \quad F'_y(x, y) = 3x^2 - 2y, \quad F'_x(2, -1) = -2,$$
$$F'_y(2, -1) = 14$$

Ecuațiile tangentei și normalei se scriu prin urmare

$$(T) \qquad (x-2)(-2) + (y+1)\cdot 14 = 0$$

$$(N) \qquad \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{14}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau după efectuarea calculelor

$$(T) \qquad x - 7y - 9 = 0$$

$$(N) \qquad 7x + y - 13 = 0$$

316. Să se găsească lungimile segmentelor, tangentă, subtangentă, normală, subnormală ale curbelor

a) $y = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, în punctul $M_0\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$,

b) $y = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbf{R}$, într-un punct oarecare $M(x, y)$.

R. Dacă $M(x, y)$ este un punct oarecare pe curba

$$y = y(x), \qquad x \in (x_1, x_2)$$

şi dacă notăm respectiv cu MT, PT, MN, PN segmentele tangentă, subtangentă, normală, subnormală, avem

$$MT = \left|\frac{y}{y'}\right| \sqrt{1 + y'^2}, \quad PT = \left|\frac{y'}{y}\right|, \quad MN = |y| \sqrt{1 + y'^2}, \quad PN = |yy'|$$

În cazul nostru avem

a) $y'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

$$MT = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad PT = \frac{1}{2}, \quad MN = \sqrt{5}, \quad PN = 2$$

b) $y(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y'(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$MT = |\operatorname{cth} x| \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = |\operatorname{cth} x| \cdot \sqrt{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{|\operatorname{sh} x|} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{2|e^x - e^{-x}|}$$

$$PT = |\operatorname{cth} x| = \frac{e^x + e^{-x}}{|e^x - e^{-x}|}, \quad MN = \operatorname{ch}^2 x = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}, \quad PN = \frac{1}{4} e^{2x} - e^{-2x}.$$

317. Să se afle lungimile segmentelor tangentă, subtangentă, normală, subnormală în punctul $M_0\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1\right)$ la cicloida (fig. 26)

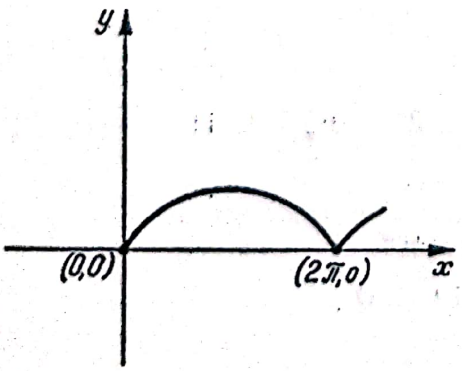

Fig. 26

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t \in [0, 2\pi)$$

R. Coordonata parametrică a punctului M_0 se află din sistemul

$$\begin{cases} t - \sin t = \frac{\pi}{2} - 1 \\ 1 - \cos t = 1 \end{cases}$$

care ne dă prin rezolvare $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem apoi succesiv

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} =$$

$$\frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$$

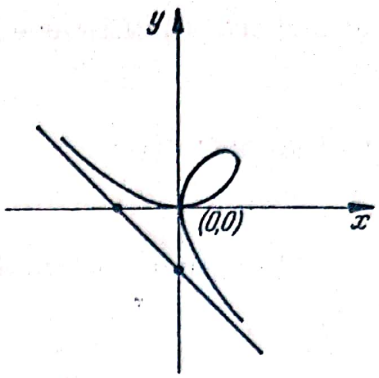

Fig. 27

de unde rezultă că punctul $M_0\left(t_0 = \frac{\pi}{2}\right)$ avem

$$y' = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

Segmentele tangentă, subtangentă, normală, subnormală au lungimile

$$MT = \sqrt{2}, \quad PT = 1, \quad MN = \sqrt{2}, \quad PN = 1.$$

318. Să se afle lungimile segmentelor tangentă, subtangentă, normală, subnormală în punctul $M_0(1, 1)$ la folim-ul lui Descartes (fig. 27)

$$x^3 + y^3 - 2xy = 0$$

R. Dacă notăm

$$F(x, y) \equiv x^3 + y^3 - 2xy$$

atunci avem

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 2y, \quad F'_y(x, y) = 3y^2 - 2x, \quad F'_x(1, 1) = 1, \quad F'_y(1, 1) = 1$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad y'(1) = -\frac{F'_x(1, 1)}{F'_y(1, 1)} = -1$$

Lungimile segmentelor tangentă, subtangentă, normală, subnormală sînt

$$MT = \sqrt{2}, \quad PT = 1, \quad MN = \sqrt{2}, \quad PN = 1$$

319. Să se arate că lungimea subtangentei la curba exponențială

$$y = ae^{bx}, \quad x \in R, \quad a, b = \text{const.}$$

este constantă.

R. Avem

$$y'(x) = abe^{bx}, \quad PT = \left|\frac{y}{y'}\right| = \left|\frac{ae^{bx}}{abe^{bx}}\right| = \frac{1}{|b|}.$$

320. Să se găsească familia de curbe care au subtangenta constantă.

R. Dacă lungimea subtangentei este egală cu $\frac{1}{b}$, iar curba căutată este dată prin ecuația explicită

$$y = y(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci trebuie să avem relația

$$\frac{y}{y'} = \frac{1}{b}$$

care se mai scrie

$$\frac{dy}{y} = b\,dx$$

Integrînd în ambii membri, obținem

$$\ln \frac{y}{a} = bx$$

de unde rezultă

$$y = ae^{bx}$$

a fiind o constantă de integrare.

Observație. Așa cum am văzut, o curbă plană are subtangenta constantă, dacă și numai dacă este o curbă exponențială.

321. Să se afle curbura și raza de curbură a lănțișorului

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad x \in \mathbf{R}$$

și să se arate că raza de curbură este egală cu lungimea segmentului normală.

R. Pentru o curbă plană dată prin ecuația explicită

$$y = y(x)$$

curbura K și raza de curbură R sînt date de formulele

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{1}{|K|}$$

În cazul nostru avem

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

astfel încît curbura și raza de curbură au valorile

$$K = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}}, \quad R = |a| \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$$

În ceea ce privește lungimea segmentului normală, avem succesiv

$$MN = |y| \sqrt{1 + y'^2} = |a| \operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = |a| \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$$

de unde se vede că

$$R = MN$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

322. Să se calculeze curbura și raza de curbură a cicloidei

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

și să se arate că raza de curbură este de două ori mai mare decît lungimea segmentului normală.

R. Pentru o curbură plană dată prin ecuațiile parametrice

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

curbura și raza de curbură sînt date de formulele

$$K = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}$$

În cazul nostru avem

$$\dot{x} = a(1 - \cos t), \quad \ddot{x} = a \sin t, \quad \dot{y} = a \sin t, \quad \ddot{y} = a \cos t$$

astfel încît curbura și raza de curbură au valorile

$$K = \frac{a^2(\cos t - 1)}{a^3(2 - 2\cos t)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}} \cdot a \cdot (1 - \cos t)^{1/2}} = -\frac{1}{4a \sin \frac{t}{2}},$$

$$R = 4|a| \sin \frac{t}{2}$$

În ceea ce privește lungimea segmentului normală, avem succesiv

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$$

$$MN = |y| \sqrt{1 + y'^2} = |a| \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}} = 2|a| \sin \frac{t}{2}$$

de unde se vede că

$$R = 2MN$$

ceea ce trebuia demonstrat.

323. Să se afle curbura și raza de curbură în punctul $M_0(1, -1)$ la curba

$$x^3 - y^3 + 2xy = 0, \quad (x, y) \in R^2.$$

R. Notăm

$$F(x, y) \equiv x^3 - y^3 + 2xy$$

Ținem seama că pentru o curbă plană dată prin ecuația implicită

$$F(x, y) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

curbura și raza de curbură sînt date de formulele

$$K = \frac{2F'_xF'_yF''_{xy} - F'^2_xF''_{yy} - F'^2_yF''_{xx}}{(F'^2_x + F'^2_y)^{\frac{3}{2}}}, \qquad R = \frac{(F'^2_x + F'^2_y)^{\frac{3}{2}}}{|2F'_xF'_yF''_{xy} - F'^2_xF''_{yy} - F'^2_yF''_{xx}|}$$

Calculăm derivatele parțiale

$$F'_x(x, y) = 3x^2 + 2y, \quad F'_y(x, y) = -3y^2 + 2x, \quad F''_{xx}(x, y) = 6x,$$
$$F''_{xy}(x, y) = 2, \quad F''_{yy}(x, y) = -6y, \quad F'_x(1, -1) = 1, \quad F'(1, -1) = -1$$
$$F''_{xx}(1, -1) = 6, \quad F''_{xy}(1, -1) = 2, \quad F''_{yy}(1, -1) = 6.$$

Înlocuind în expresiile curburii și razei de curbură, obținem valorile

$$K = -4\sqrt{2}, \qquad R = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

324. Să se găsească expresiile curburii și razei de curbură în coordonate polare

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \qquad \rho = \rho(\theta)$$

R. Efectuînd această schimbare de variabile, obținem succesiv

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\rho\cdot\sin\theta + \rho\cos\theta\, d\theta}{d\rho\cdot\cos\theta - \rho\sin\theta\, d\theta} = \frac{\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} =$$

$$= \frac{(\rho''\sin\theta + 2\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta) - (\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)(\rho''\cos\theta - 2\rho'\sin\theta - \rho\cos\theta}{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)^3}$$

Efectuînd calculele, rezultă

$$y'' = \frac{\rho^2 + \rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)^3}$$

iar formulele curburii și razei de curbură devin

$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}, \qquad R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}$$

325. Să se afle curbura și raza de curbură în punctul $M_0\left(\theta_0 = \frac{\pi}{4}\right)$ la curba dată în coordonate polare

$$\rho(\theta) = 5\sin 2\theta; \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

R. Într-un punct oarecare avem derivatele

$$\rho'(\theta) = 10\cos 2\theta, \qquad \rho''(\theta) = -20\sin 2\theta$$

Scanned with OKEN Scanner

În punctul M_0 obținem

$$\rho\left(\frac{\pi}{4}\right)=5, \quad \rho'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0, \quad \rho''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-20$$

Înlocuind în formulele de mai sus, obținem

$$K=R=1$$

326. Să se calculeze curbura și raza de curbură a cardioidei

$$\rho(\theta)=2a(1-\cos\theta)$$

în punctul $M_0\left(\theta_0=\frac{\pi}{2}\right)$.

R. Derivăm în raport cu θ și avem

$$\rho'(\theta)=2a\sin\theta, \quad \rho''(\theta)=2a\cos\theta.$$

Valorile funcției și a primelor două derivate în punctul M_0 sînt

$$\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)=2a, \quad \rho'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2a, \quad \rho''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Înlocuind în expresiile curburii și razei de curbură, obținem

$$K=\frac{3\sqrt{2}}{8a}, \quad R=\frac{4\sqrt{2}}{3}|a|.$$

327. Să se afle punctele de intersecție dintre curba C și planul P unde

$$(C) \quad x=t^2+2t+3, \quad y=2t^2+3t+1, \quad z=3t^2+t+2, \quad t\in R$$

$$(P) \quad x+y+z-6=0$$

R. Înlocuind pe x, y, z din ecuațiile curbei în ecuația planului, obținem ecuația de gradul doi în t

$$t^2+t=0$$

care are rădăcinile

$$t_1=0, \quad t_2=-1$$

Substituim acum valorile lui t în ecuațiile curbei și obținem punctele de intersecție dintre curbă și plan

$$M_1(3, 1, 2), \quad M_2(2, 0, 4).$$

328. Să se determine parametrul λ astfel încît curba

$$(C) \quad x=t+\frac{1}{t}, \quad y=\lambda t+\frac{1}{2t}, \quad z=3t+\frac{1}{3t}, \quad (t\neq 0)$$

să fie tangentă la planul

$$(P) \quad \lambda x-2y-3z+2(\lambda-2)=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Curba C este tangentă în punctul M la planul P dacă ea intersectează planul în două puncte confundate în punctul M.

Pentru a afla valorile parametrului λ înlocuim pe x, y, z din ecuațiile parametrice ale curbei în ecuația planului și punem condiția ca ecuația de gradul doi în t care se obține să aibă rădăcinile confundate. Avem

$$\lambda\left(t+\frac{1}{t}\right)-2\left(\lambda t+\frac{1}{2t}\right)-3\left(3t+\frac{1}{3t}\right)+2(\lambda-2)=0$$

Efectuînd calculele rezultă ecuația

$$(\lambda+9)\,t^2-2(\lambda-2)\,t+2-\lambda=0$$

Anulăm realizantul acestei ecuații

$$(\lambda-2)^2-(\lambda+9)\,(2-\lambda)=0$$

Efectuăm reducerile

$$2\lambda^2+3\lambda-14=0$$

Rădăcinile acestei ecuații sînt

$$\lambda_1=2, \qquad \lambda_2=-\frac{7}{2}$$

Pentru $\lambda_1=2$, obținem $t_1'=t_1''=0$, care nu convine.

Pentru $\lambda_2=-\frac{7}{2}$, obținem $t_2'=t_2''=-1$, de unde rezultă

$$x=-2, \qquad y=3, \qquad z=-\frac{10}{3}$$

Deducem astfel că pentru $\lambda=-\frac{7}{2}$, curba strîmbă

$$(C) \qquad x=t+\frac{1}{t}, \quad y=-\frac{1}{2}\left(7t-\frac{1}{t}\right), \quad z=3t+\frac{1}{3t}$$

este tangentă în punctul $M\left(-2{,}3, -\frac{10}{3}\right)$ la planul

$$(P) \qquad 7x+4y+6z+22=0$$

329. Să se găsească o reprezentare parametrică rațională a curbei

$$(C) \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

R. A găsi o reprezentare parametrică rațională a curbei C înseamnă a exprima coordonatele x, y, z ale unui punct oarecare al curbei C prin funcții raționale de un parametru t.

Un punct al curbei este $M_0(1, -1, 0)$. Ecuațiile unei drepte oarecare ce trece prin punctul M_0 sînt

$$(D) \qquad x=1+l\rho, \quad y=-1+m\rho, \quad z=n\rho, \quad (\rho\in\mathbf{R})$$

unde l, m, n sînt parametrii directori ai dreptei, iar ρ este un parametru pe dreaptă. Punctul M_0 se obține pentru $\rho=0$, deci vom presupune $\rho\neq 0$, pentru a obține alte puncte ale dreptei.

Scanned with OKEN Scanner

Intersectînd dreapta D cu curba C, adică înlocuind pe x, y, z din ecuațiile dreptei în ecuațiile curbei, obținem sistemul

$$\begin{cases} \rho(l^2 + m^2 + n^2) + 2(l - m) = 0 \\ l + m + n = 0 \end{cases}$$

Ținînd seama de a doua ecuație a acestui sistem în prima, avem

$$\rho = \frac{m - l}{l^2 + lm + m^2}$$

astfel că înlocuind în (D), obținem

$$x = \frac{2lm + m^2}{l^2 + lm + m^2}, \quad y = -\frac{l(l + 2m)}{l^2 + lm + m^2}, \quad z = \frac{l^2 - m^2}{l^2 + lm + m^2}$$

Dacă punem

$$l = mt$$

atunci obținem în definitiv ecuațiile

$$(C) \qquad x = \frac{2t + 1}{t^2 + t + 1}, \quad y = -\frac{t(t + 2)}{t^2 + t + 1}, \quad z = \frac{t^2 - 1}{t^2 + t + 1}, \quad (t \in \mathbf{R})$$

care constituie o reprezentare parametrică rațională a curbei C.

Punctul M_0 al curbei se obține pentru $t_0 = 1$.

330. Să se arate că curba în spațiu

$$(C) \qquad \begin{cases} x = 3 + 2t + 4t^3 \\ y = 4 + 3t + 2t^3 \\ z = 2 + 4t + 3t^3 \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

este situată într-un plan, a cărui ecuație se cere.

R. A arăta că această curbă este plană, revine la a arăta că există un plan

$$(P) \qquad ax + by + cz + d = 0$$

astfel încît orice punct al curbei este conținut în plan.

Pentru aceasta înlocuim pe x, y, z din ecuațiile curbei în ecuația planului și obținem

$$a(3 + 2t + 4t^3) + b(4 + 3t + 2t^3) + c(2 + 4t + 3t^3) + d \equiv 0, \quad (\forall t \in \mathbf{R}).$$

Identificînd, rezultă sistemul liniar și omogen în a, b, c, d

$$\begin{cases} 3a + 4b + 2c + d = 0 \\ 2a + 3b + 4c \quad\quad = 0 \\ 4a + 2b + 3c \quad\quad = 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinantul format cu coeficienţii lui a, b, c este

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 64 + 8 - 24 - 24 - 24 = 27$$

Fiind diferit de zero, putem rezolva pe a, b, c în funcţie de d. Obţinem astfel

$$a = -\frac{d}{27}, \quad b = -\frac{10d}{27}, \quad c = \frac{8d}{27}, \quad (d \neq 0)$$

Înlocuind în (P) şi simplificînd cu d, obţinem

$$(P) \qquad x + 10y - 8z + 27 = 0$$

care este ecuaţia planului ce conţine curba dată C.

331. Să se demonstreze că o curbă în spaţiu

$$(C) \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z - z(t), \quad t \in (t_1, t_2)$$

este plană dacă şi numai dacă avem

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix} \equiv 0, \quad [\forall t \in (t_1, t_2)]$$

R. Presupunem mai întîi că curba C este plană şi fie

$$(P) \qquad ax + by + cz + d = 0$$

ecuaţia planului în care este situată curba C, parametrii directori (a, b, c) ai normalei la plan nefiind toţi nuli. Avem

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d \equiv 0 \quad (I)$$

Derivînd de trei ori această identitate în raport cu t, obţinem

$$\begin{cases} a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z} = 0 \\ a\ddot{x} + b\ddot{y} + c\ddot{z} = 0 \\ a\dddot{x} + b\dddot{y} + c\dddot{z} = 0 \end{cases}$$

Acest sistem liniar şi omogen în a, b, c trebuind să admită soluţie nebanală, rezultă

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix} = 0$$

ceea ce era de arătat.

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, dacă acest determinant este identic nul, atunci sistemul liniar şi omogen de mai sus admite soluţii nebanale, deci există (a, b, c) nu toţi nuli, astfel ca să avem identitatea (I), de unde rezultă că curba C este plană, ceea ce trebuia arătat.

Cu aceasta proprietatea din enunţ este complet demonstrată.

332. Să se arate că curba

$$(C) \qquad \begin{cases} x = 1 + t^3 \\ y = t^2 + t^3 \\ z = 5t^2 + 2t^2 + 3 \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}$$

este plană şi să se afle ecuaţia planului în care este situată.

R. Avem

$$\dot{x} = 3t^2, \quad \dot{y} = 2t + 3t^2, \quad \dot{z} = 15t^2 + 4t$$
$$\ddot{x} = 6t, \quad \ddot{y} = 2 + 6t, \quad \ddot{z} = 30t + 4$$
$$\dddot{x} = 6, \quad \dddot{y} = 6, \quad \dddot{z} = 30$$

Calculăm acum determinantul

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3t^2 & 2t + 3t^2 & 15t^2 + 4t \\ 6t & 2 + 6t & 30t + 4 \\ 6 & 6 & 30 \end{vmatrix} =$$

$$= 12t \begin{vmatrix} 3t & 2 + 3t & 15t + 4 \\ 3t & 1 + 3t & 15t + 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 12t \begin{vmatrix} 3t & 2 & 4 \\ 3t & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

Acest determinant fiind identic, curba C este plană. Fie

$$(P) \qquad ax + by + cz + d = 0$$

ecuaţia planului ce conţine curba C. Înlocuim pe x, y, z din ecuaţiile curbei în ecuaţia planului

$$a(1 + t^3) + b(t^2 + t^3) + c(5t^3 + 2t^2 + 3) + d \equiv 0$$

Facem identificarea şi obţinem sistemul liniar omogen în a, b, c, d.

$$\begin{cases} a + 3c + d = 0 \\ b + 2c = 0 \\ a + b + 5c = 0 \end{cases}$$

Rezolvînd în funcţie de c, avem

$$a = -3c, \quad b = -2c, \quad d = 0, \quad (c \neq 0)$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în (P) și simplificînd cu c, rezultă

$$3x + 2y - z = 0$$

care este ecuația planului ce conține curba C.

333. Să se determine parametrul λ astfel încît curba

$$(C) \quad \begin{cases} x = t + t^3 \\ y = t^2 + t^3 \\ z = 1 + 3\lambda t + 2t^2 + \lambda t^3 \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}$$

să fie plană și să se scrie ecuația planului ce o conține.

Avem

$$\dot{x} = 1 + 3t^2, \quad \dot{y} = 2t + 3t^2, \quad \dot{z} = 3\lambda + 4t + 3\lambda t^2$$
$$\ddot{x} = 6t, \quad \ddot{y} = 2 + 6t, \quad \ddot{z} = 4 + 6\lambda t$$
$$\dddot{x} = 6, \quad \dddot{y} = 6, \quad \dddot{z} = 6\lambda$$

Determinăm pe λ din condiția ca următorul determinant să fie identic nul

$$\begin{vmatrix} 1+3t^2 & 2t+3t^2 & 3\lambda+4t+3\lambda t^2 \\ 6t & 2+6t & 4+6\lambda t \\ 6 & 6 & 6\lambda \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1+3t^2 & 2t+3t^2 & 3\lambda+4\lambda t+3\lambda t^2 \\ 3t & 1+3t & 2+3\lambda t \\ 1 & 1 & 1\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 12 \begin{vmatrix} 1+3t^2 & 2t-1 & 2\lambda+4t \\ 3t & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 12(-2-2\lambda) = -24(\lambda+1) \equiv 0$$

de unde rezultă $\lambda = -1$. Ecuațiile curbei C devin

$$(C) \quad \begin{cases} x = t + t^3 \\ y = t^2 + t^3 \\ z = 1 - 3t + 2t^2 - t^3 \end{cases}$$

Această curbă fiind plană, fie P ecuația planului în care ea se află

$$(P) \qquad ax + by + cz + d = 0$$

Înlocuim pe x, y, z din ecuațiile curbei în ecuația planului

$$a(t + t^3) + b(t^2 + t^3) + c(1 - 3t + 2t^2 - t^3) + d \equiv 0$$

Identificînd, obținem sistemul liniar omogen în a, b, c, d

$$\begin{cases} c + d = 0 \\ a - 3c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd în funcție de c, rezultă

$$a = 3c, \quad b = -2c, \quad d = -c, \quad (c \neq 0)$$

Înlocuim în (P) și simplificăm cu c. Găsim ecuația planului căutat

$$3x - 2y + z - 1 = 0$$

334. Să se scrie ecuațiile tangentei și ecuația planului normal la curba

(C) $$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t, \quad t \in \mathbf{R}$$

în punctul $M_0(1, 0, 1)$.

R. Coordonata parametrică a punctului M_0 se obține din sistemul

$$\begin{cases} e^t \cos t = 1 \\ e^t \sin t = 0 \\ e^t = 1 \end{cases}$$

care are soluția $t_0 = 0$. Ecuațiile tangentei și ecuația planului normal sînt respectiv

(T) $$\frac{x-1}{x'(0)} = \frac{y}{y'(0)} = \frac{z-1}{z'(0)}$$

(π) $$(x-1)\,x'(0) + yy'(0) + (z-1)\cdot z'(0) = 0$$

Avem apoi

$$x'(t) = e^t(\cos t - \sin t), \quad y'(t) = e^t(\sin t + \cos t), \quad z'(t) = e^t$$

$$x'(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad z'(0) = 1$$

Ecuațiile de mai sus devin

(T) $$x - 1 = y = z - 1$$

(π) $$x + y + z - 2 = 0$$

335. Să se scrie ecuațiile tangentei și ecuația planului normal în punctul $M_0(1, 1, -1)$ la curba dată prin ecuațiile implicite

(C) $$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

R. Notăm

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6, \quad G(x, y, z) \equiv x + 2y + 3z$$

Ecuațiile tangentei și ecuația planului normal sînt

(T) $$\frac{x-1}{\dfrac{D(F, G)}{D(y, z)}} = \frac{y-1}{\dfrac{D(F, G)}{D(z, x)}} = \frac{z+1}{\dfrac{D(F, G)}{D(x, y)}}$$

(π) $$(x-1)\cdot\frac{D(F, G)}{D(y, z)} + (y-1)\cdot\frac{D(F, G)}{D(z, x)} + (z+1)\cdot\frac{D(F, G)}{D(x, y)} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem apoi

$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = 4y, \quad F'_z(x, y, z) = 6z, \quad G'_x(x, y, z) = 1,$$

$$G'_y(x, y, z) = 2, \quad G'_z(x, y, z) = 3$$

$$F'_x(1, 1, -1) = 2, \quad F'_y(1, 1, -1 = 4, \quad F'_z(1, 1, -1) = -6,$$

$$G'_x(1, 1, -1) = 1 \quad G'_y(1, 1, -1) = 2, \quad G'_z(1, 1, -1) = 3$$

Determinanţii funcţionali (jacobienii) în punctul M_0 au valorile

$$\frac{D(F, G)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 24,$$

$$\frac{D(F, G)}{D(z, x)} = \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -12,$$

$$\frac{D(F, G)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuaţiile de mai sus devin

$$(T) \qquad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$$

$$(\pi) \qquad 2x - y - 1 = 0$$

336. Să se determine tangentele la curba dată prin ecuaţia vectorială

$$(C) \qquad \vec{r} = \frac{1}{2}t^4 \cdot \vec{i} - \frac{1}{3}t^3 \cdot \vec{j} + t^2 \cdot \vec{k}, \quad t \in \mathbf{R}$$

care sînt paralele cu planul

$$(P) \qquad 3x - 2y - 2z - 1 = 0$$

R. Ecuaţiile parametrice ale curbei sînt

$$(C) \qquad x = \frac{1}{2}t^4, \quad y = -\frac{1}{3}t^3, \quad z = t^3, \quad t \in \mathbf{R}$$

Parametrii directori ai unei tangente oarecare sînt

$$\dot{x} = 2t^3, \quad \dot{y} = -t^2, \quad \dot{z} = 2t, \quad (t \neq 0)$$

Pentru ca o tangentă să fie paralelă cu planul P, trebuie să avem

$$3 \cdot 2t^3 + 2t^2 - 4t = 2t(3t^2 + t - 2) = 0, \quad (t \neq 0)$$

Această ecuaţie are rădăcinile convenabile

$$t_1 = -1, \quad t_2 = \frac{2}{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Punctele de tangenţă sînt respectiv

$$M_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1\right),\quad M_2\left(\frac{8}{81},\ -\frac{8}{81},\ \frac{4}{9}\right)$$

iar parametrii directori ai tangentelor în aceste puncte sînt respectiv

$$\vec{v}_1 = (2, 1, 2),\quad \vec{v}_2 = (4, -3,9)$$

Ecuaţiile tangentelor în punctele M_1, M_2 sînt respectiv

$$(T_1)\qquad \frac{2x-1}{4}=\frac{3y-1}{3}=\frac{z-1}{2},\qquad (T_2)\qquad \frac{81x-8}{4}=\frac{81y+8}{-3}=\frac{9z-4}{1}$$

337. Să se determine punctele de pe curba

$$(C)\qquad x = t + \ln t,\quad y = t^2,\quad z = 1 - t,\quad (t > 0)$$

în care tangentele sînt paralele cu planul

$$(P)\qquad 12x - y + 14z - 1 = 0$$

R. Parametrii directori ai unei tangente oarecare sînt

$$\dot{x} = 1 + \frac{1}{t},\quad \dot{y} = 2t,\quad \dot{z} = -1,\quad (t > 0)$$

Pentru ca o tangentă să fie paralelă cu planul P, trebuie să avem

$$12\left(1 + \frac{1}{t}\right) - 2t - 14 = 0$$

Această ecuaţie se mai scrie

$$t^2 + t - 6 = 0$$

care are rădăcina convenabilă

$$t_0 = 2$$

Punctul de tangenţă M_0 şi vectorul tangent $\vec{v}_0$ sînt

$$M_0(2 + \ln 2, 4, -1),\quad \vec{v}_0 = (3, 8, -2)$$

iar tangenta are ecuaţiile

$$(T_0)\qquad \frac{x-2-\ln 2}{3}=\frac{y-4}{8}=\frac{z+1}{-2}$$

338. Să se determine punctele de pe curba

$$(C)\qquad x = \ln t,\quad y = 2t,\quad z = t^2,\quad (t > 0)$$

în care planele normale sînt paralele cu dreapta

$$(D)\qquad x + 4y = 0,\quad y = z.$$

R. Vectorul director al dreptei D este

$$\vec{v} = (4, -1, -1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Parametrii directori ai tangentei, care sînt în acelaşi timp parametrii directori ai normalei la planul normal, sînt daţi

$$\dot{x} = \frac{1}{t}, \quad \dot{y} = 2, \quad \dot{z} = 2t, \qquad (t > 0)$$

Pentru ca planul normal să fie paralel cu dreapta D, trebuie să avem

$$\frac{4}{t} - 2 - 2t = 0$$

Această ecuaţie se mai scrie

$$t^2 + t - 2 = 0$$

şi are rădăcina convenabilă

$$t_0 = 1.$$

Planul normal trece deci prin punctul $M_0(0, 2, 1)$ şi are normala

$$\vec{n}_0 = (1, 2, 2).$$

Rezultă că ecuaţia planului normal este

$$x + 2(y - 2) + 2(z - 1) = 0$$

care se mai scrie

$$x + 2y + 2z - 6 = 0$$

339. Să se determine curba descrisă de intersecţiile tangentelor la curba

(C) $$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3, \qquad t \in \mathbf{R}$$

cu planul xOy.

R. Parametrii directori ai unei tangente oarecare sînt

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 2t, \quad \dot{z} = 3t^2$$

Prin urmare, tangenta are ecuaţiile

$$\frac{x - t}{1} = \frac{y - t^2}{2t} = \frac{z - t^3}{3t^2}$$

Intersectînd această tangentă cu planul xOy

(P) $$z = 0$$

obţinem

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{3} \\ y = \dfrac{t^2}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Eliminînd parametrul t între primele două ecuații, rezultă

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4} x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Această curbă este o parabolă situată în planul xOy.

340. Să se scrie ecuația vectorială a elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

R. Ecuațiile parametrice ale elipsoidului sînt

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v \\ y = b \sin u \sin v \\ z = c \cos u \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant u < \pi \\ 0 \leqslant v < 2\pi \end{pmatrix}$$

Notînd cu $\vec{r}$ vectorul de poziție al punctului curent (x, y, z), avem

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Înlocuim pe x, y, z din ecuațiile parametrice și obținem ecuația vectorială

$$\vec{r} = i \cdot a \sin u \cos v + \vec{j} \cdot b \sin u \cos v + \vec{k} \cdot c \cos u.$$

341. Să se scrie ecuația carteziană a suprafeței care are ecuația vectorială

$$\vec{r} = (u + v) \cdot \vec{i} + (u^2 + v^2) \cdot \vec{j} + (u^3 + v^3) \cdot \vec{k}$$

R. Avem ecuațiile parametrice

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3$$

Pentru a găsi ecuația carteziană a suprafeței, eliminăm parametrii u, v între aceste trei ecuații. Avem succesiv

$$z = (u + v)(u^2 - uv + v^2) = x(y - uv)$$

$$x^2 = u^2 + 2uv + v^2 = y + 2uv, \quad uv = \frac{x^2 - y}{2}$$

$$z = x\left(y - \frac{x^2 - y}{2}\right)$$

Efectuînd calculele, obținem ecuația carteziană

$$x^3 - 3xy + 2z = 0.$$

342. Să se găsească o reprezentare parametrică rațională a suprafeței

(*S*) $$x^2 + 2xz - z^2 + 1 = 0$$

R. Punctul $P_0(0, 0, 1)$ se află pe suprafață. Ecuațiile parametrice al unei drepte oarecare ce trece prin punctul P_0 sînt

(*D*) $$x = \rho u, \quad y = \rho v, \quad z = 1 + \rho, \quad \rho \in \mathbf{R}$$

Scanned with OKEN Scanner

Intersectăm dreapta D cu suprafața S

$$\rho^2u^2 + 2\rho u(1 + \rho) - (1 + \rho)^2 + 1 = 0$$

Efectuînd calculele, obținem

$$\rho = 2 \cdot \frac{1 - u}{u^2 + 2u - 1}$$

de unde rezultă ecuațiile parametrice raționale

$$(S) \qquad x = 2u\,\frac{1 - u}{u^2 + 2u + 1}, \quad y = 2v\,\frac{1 - u}{u^2 + 2u - 1}, \quad z = \frac{u^2 + 1}{u^2 + 2u - 1}$$

343. Se dă suprafața

$$(S) \qquad x = u^2 + v + 1, \quad y = u^2 - v + 1, \quad z = uv + 2$$

și punctul $M_0(u = 1, v = -1)$ situat pe suprafață. Să se scrie ecuațiile carteziene ale curbelor $u = \text{const.}$ și $v = \text{const.}$ care trec prin M_0.

R. Punctul M_0 se află la intersecția curbelor $\Gamma_v(u = 1)$ și $\Gamma_u(v = -1)$. Aceste curbe au ecuațiile parametrice

$$(\Gamma_v) \qquad x = v + 2, \quad y = 2 - v, \quad z = v + 2$$

$$(\Gamma_u) \qquad x = u^2, \quad y = u^2 + 2, \quad z = -u + 2$$

iar ecuațiile carteziene sînt respectiv

$$(\Gamma_v) \qquad x = z, \quad x + y = 4$$

$$(\Gamma_u) \qquad y - x = 2, \quad x = (z - 2)^2$$

344. Se dă suprafața

$$(S) \qquad x = u + \cos v, \quad y = u - \sin v, \quad z = -u$$

și punctul $M_0\left(u = 1, v = \frac{\pi}{2}\right)$ pe suprafață. Să se scrie ecuațiile tangentelor la curbele coordonate $\Gamma_v(u = 1)$, $\Gamma_u\left(v = \frac{\pi}{2}\right)$ în punctul M_0 și ecuațiile planelor normale în acest punct.

R. Parametrii directori ai tangentei într-un punct oarecare la curbele Γ_v, Γ_u sînt respectiv

$$\overrightarrow{M_0T}(x'_v = -\sin v, \quad y'_v = -\cos v, \quad z'_v = 0)$$

$$\overrightarrow{M_0T'}(x'_u = 1, \quad y'_u = 1, \quad z'_u = -1).$$

În punctul M_0 avem respectiv parametrii directori

$$\overrightarrow{M_0T}(-1, 0, 0), \quad \overrightarrow{M_0T'}(1, 1, -1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece coordonatele carteziene ale punctului M_0 sînt $(1, 0, -1)$, rezultă că ecuațiile tangentelor sînt respectiv

$$(M_0T) \qquad \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{0}$$

$$(M_0T') \qquad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

iar planele normale au respectiv ecuațiile

$$(P) \qquad x - 1 = 0$$

$$(P') \qquad x + y - z - 2 = 0$$

345. Să se scrie ecuația planului tangent în punctul $M_0(u = 2, v = 1)$ la suprafața

$$(S) \qquad x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = uv.$$

R. Avem într-un punct oarecare

$$x_u = 1, \quad y_u = 1, \quad z_u = v$$

$$x_v = 1, \quad y_v = -1, \quad z_v = u$$

iar în punctul dat M_0

$$x_u = 1, \quad y_u = 1, \quad z_u = 1$$

$$x_v = 1, \quad y_v = -1, \quad z_v = 2.$$

Coordonatele carteziene ale punctului M_0 fiind $(3, 1, 2)$, ecuația planului tangent este

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Efectuînd calculele, obținem

$$3x - y - 2z - 4 = 0$$

346. Să se scrie ecuația planului tangent în punctul $M_0(0, 0, 2)$ la suprafața

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4xz + z^2 + 2x + 4y - 6z + 8 = 0$$

R. Notăm

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + 2xy + y^2 + 4xz + z^2 + 2x + 4y - 6z + 8$$

Calculăm derivatele parțiale de ordinul I ale funcției $f(x, y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 4z + 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y + 4, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4x + 2z - 6$$

Scanned with OKEN Scanner

În punctul $M_0\,(0, 0, 2)$, avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2$$

Ecuația planului tangent

$$10x + 4y - 2(z - 2) = 0$$

devine după efectuarea calculelor

$$5x + 2y - z + 2 = 0$$

347. Să se scrie ecuația planului tangent în punctul $M_0(1, 0, 2)$ la suprafața

$$z = 5x^2 + 4y - 3$$

Notăm

$$z = f(x, y) \equiv 5x^2 + 4y - 3$$

Calculăm derivatele parțiale

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 10x, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = 4$$

În punctul dat $M_0(1, 0, 2)$ avem

$$p = 10, \quad q = 4.$$

Ecuația planului tangent

$$10(x - 1) + 4y - (z - 2) = 0$$

se scrie, după efectuarea calculelor, sub forma

$$10x + 4y - z - 8 = 0.$$

348. Să se scrie ecuațiile normalei în punctul $M_0(u = 1, v = -1)$ la suprafața

$$(S) \qquad x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad z = uv$$

R. Coordonatele carteziene ale punctului M_0 sînt $(1, 0, -1)$. Avem

$$x_u = u, \quad y_u = u, \quad z_u = v$$

$$z_v = v, \quad y_v = -v, \quad z_v = u$$

În punctul $M_0(u = 1, v = -1)$ obținem

$$x_u = 1, \quad y_u = 1, \quad z_u = -1$$

$$x_v = -1, \quad y_v = 1, \quad z_v = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculăm acum parametrii directori ai normalei în punctul M_0 la S

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Ecuațiile normalei se scriu

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{2}$$

sau sub forma

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$$

349. Să se scrie ecuațiile normalei în punctul $M_0(3, 1, -1)$ la suprafața

$$x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0, \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

R. Notăm

$$f(x, y, z) \equiv x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4$$

Calculăm derivatele parțiale

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -6z$$

În punctul $M_0(3, 1, -1)$ avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 6$$

Ecuațiile normalei

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{6}$$

se mai pot scrie

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$$

350. Să se scrie ecuațiile normalei în punctul $M_0(1, 2, 9)$ la suprafața

$$z = x^3 + y^3$$

R. Notăm

$$z = f(x, y) \equiv x^3 + y^3$$

Calculăm derivatele parțiale

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$$

Scanned with OKEN Scanner

În punctul dat avem

$$p = 3, \qquad q = 12$$

Ecuațiile normalei sînt

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-9}{-1}$$

351. Să se determine un punct al suprafeței

(S) $$x^3 - 3xy - z = 0$$

în care normala este perpendiculară pe planul

(P) $$5x + 6y + 2z - 7 = 0$$

R. Notăm cu $M_0(x_0, y_0, z_0)$ punctul căutat, avem

$$x_0^3 - 3x_0y_0 - z_0 = 0.$$

Notînd apoi

$$z = f(x, y) \equiv x^3 - 3xy$$

rezultă că parametrii directori ai normalei în M_0 la suprafața S sînt $(p, q, -1)$ unde p, q sînt dați de

$$p = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 3(x_0^2 - y_0), \qquad q = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -3x_0$$

Pentru ca normala în M_0 la S să fie perpendiculară pe P trebuie să avem

$$\frac{3(x_0 - y_0)}{5} = \frac{-3x_0}{6} = \frac{-1}{2}$$

Rezolvînd sistemul

$$x_0^3 - 3x_0y_0 - z_0 = 0, \qquad \frac{3(y_0 - x_0^2)}{5} = \frac{x_0}{2} = \frac{1}{2}$$

găsim singura soluție $M_0\left(1, \frac{11}{6}, -\frac{9}{2}\right)$.

352. Să se determine normala comună dintre suprafața S și planul P

(S) $$x + yz + z^3 - 3 = 0$$

(P) $$x + 2y + 11z - 13 = 0$$

R. Notăm cu $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct de pe S, în care normala este perpendiculară pe planul dat și fie

$$f(x, y, z) \equiv x + yz + z^3 - 3$$

Parametrii directori ai normalei în M_0 la suprafață sînt

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 1, \qquad f'_y(x_0, y_0, z_0) = z_0, \qquad f'_z(x_0, y_0, z_0) = y_0 + 3z_0^2$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd sistemul

$$x_0 + y_0 z_0 + z_0^3 - 3 = 0, \quad \frac{1}{1} = \frac{z_0}{2} = \frac{y_0 + 3z_0^2}{11}$$

găsim unica soluţie $M_0(-3, -1, 2)$.

353. Să se calculeze metrica sferei

$$(S) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

R. O reprezentare parametrică a acestei suprafeţe este

$$(S) \qquad x = R \sin u \cos v, \quad y = R \sin u \sin v, \quad z = R \cos u,$$

$$(0 \leqslant u < \pi, \quad 0 \leqslant v < 2\pi)$$

Calculăm derivatele parţiale

$$x_u = R \cos u \cos v, \quad y_u = R \cos u \sin v, \quad z_u = -R \sin u$$

$$x_v = -R \sin u \sin v, \quad y_v = R \sin u \cos v, \quad z_v = 0$$

Coeficienţii primei forme fundamentale (metricii) a suprafeţei sînt

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = R^2(\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u) = R^2$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = R^2(-\sin u \cos u \sin v \cos v + \\ + \sin u \cos u \sin v \cos v) = 0$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = R^2(\sin^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \cos^2 v) = R^2 \sin^2 u$$

Prima formă fundamentală a sferei este

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = R^2\,(du^2 + \sin^2 u dv^2)$$

354. Să se scrie prima formă fundamentală a elicoidului drept

$$(S) \qquad x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av, \quad (a = \text{const.}), \quad v \in \mathbf{R}$$

Calculăm derivatele parţiale

$$x_u = \cos v, \qquad y_u = \sin v, \qquad z_u = 0$$

$$x_v = -u \sin v, \quad y_v = u \cos v, \quad z_v = a$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sînt

$$\mathrm{E} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

$$\mathrm{F} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = u(-\sin v \cos v + \sin v \cos v) = 0$$

$$\mathrm{G} = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = u^2(\sin^2 v + \cos^2 v) + a^2 = a^2 + u^2$$

Metrica suprafeţei date este prin urmare

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 = du^2 + (a^2 + u^2)\,dv^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

355. Se dă elicoidul drept

$$(S) \qquad x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av, \quad (a > 0)$$

și trei curbe Γ_1, Γ_2, Γ_3 trasate pe suprafața S, date prin ecuațiile

$$(\Gamma_1)\ v = 1, \quad (\Gamma_2)\ u = \frac{1}{2}av^2, \quad (\Gamma_3)\ u = -\frac{1}{2}av^2$$

Să facem următoarele notații

$$M_1 = \Gamma_2 \cap \Gamma_3, \quad M_2 = \Gamma_3 \cap \Gamma_1, \quad M_3 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$$

$$s_1 = \overset{\frown}{M_2M_3}, \quad s_2 = \overset{\frown}{M_3M_1}, \quad s_3 = \overset{\frown}{M_1M_2}$$

$$\theta_1 = \sphericalangle(\Gamma_2, \Gamma_3), \quad \theta_2 = \sphericalangle(\Gamma_3, \Gamma_1), \quad \theta_3 = \sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_2).$$

Se cere să se calculeze perimetrul l al triunghiului curbiliniu $M_1M_2M_3$ precum și unghiurile $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

R. Metrica elicoidului drept este, așa cum am văzut,

$$ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2)\,dv^2, \quad (a > 0).$$

Avem următoarele diferențiale pe curbele Γ_1, Γ_2, Γ_3

$$(\Gamma_1) \quad dv = 0$$

$$(\Gamma_2) \quad du = av\,dv$$

$$(\Gamma_3) \quad du = -av\,dv$$

Elementele de arc pe curbele Γ_1, Γ_2, Γ_3 vor fi așadar

$$(\Gamma_1) \quad ds^2 = du^2, \quad ds = du,$$

$$(\Gamma_2) \quad ds^2 = a^2\left(\frac{1}{4}v^4 + v^2 + 1\right)dv^2 = a^2\left(\frac{1}{2}v^2 + 1\right)^2 dv^2, \quad ds = a\left(\frac{1}{2}v^2 + 1\right)dv,$$

$$(\Gamma_3) \quad ds^2 = a^2\left(\frac{1}{4}v^4 + v^2 + 1\right)dv^2 = a^2\left(\frac{1}{2}v^2 + 1\right)^2 dv^2, \quad ds = a\left(\frac{1}{2}v^2 + 1\right)dv.$$

Coordonatele curbilinii ale punctelor M_1, M_2, M_3 sînt

$$M_1(u = 0,\ v = 0), \quad M_2\left(u = -\frac{1}{2}a,\ v = 1\right), \quad M_3\left(u = \frac{1}{2}a,\ v = 1\right)$$

Lungimile s_1, s_2, s_3 ale arcelor $\overset{\frown}{M_2M_3}$, $\overset{\frown}{M_3M_1}$, $\overset{\frown}{M_1M_2}$ sînt

$$s_1 = \left|\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} du\right| = a$$

$$s_2 = \left|\int_1^0 a\left(\frac{1}{2}v^2 + 1\right)dv\right| = \frac{7}{6}a$$

$$s_3 = \left|\int_0^1 a\left(\frac{1}{2}v^2 + 1\right)dv\right| = \frac{7}{6}a$$

Scanned with OKEN Scanner

Perimetrul l devine

$$l = s_1 + s_2 + s_3 = a + \frac{7}{6}a + \frac{7}{6}a = \frac{10}{3}a$$

Pentru a calcula unghiurile θ_1, θ_2, θ_3 ținem seama de formula

$$\cos\theta = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\cdot\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}$$

care în cazul nostru se scrie

$$\cos\theta = \frac{du\,\delta u + (a^2+u^2)\,dv\,\delta v}{\sqrt{du^2 + (a^2+u^2)\,dv^2}\cdot\sqrt{\delta u^2 + (a^2+u^2)\,\delta v^2}}$$

Rezultă astfel succesiv

$$\cos\theta_1 = \left(\frac{-a^2v^2 + a^2 + u^2}{a^2v^2 + a^2 + u^2}\right)_{\substack{u=0\\v=0}} = 1, \qquad \theta_1 = 0$$

$$\cos\theta_2 = \left(\frac{-av}{\sqrt{a^2v^2 + a^2 + u^2}}\right)_{\substack{u=-\frac{a}{2}\\v=1}} = -\frac{2}{3}, \qquad \theta_2 = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\cos\theta_3 = \left(\frac{av}{\sqrt{a^2v^2 + a^2 + u^2}}\right)_{\substack{u=\frac{a}{2}\\v=1}} = \frac{2}{3}, \qquad \theta = \arccos\frac{2}{3}$$

356. Fie suprafața

$$(S) \qquad x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = u + v$$

și curbele Γ_1, Γ_2 situate pe suprafața S, date prin ecuațiile

$$(\Gamma_1) \quad u - e^v = 0$$

$$(\Gamma_2) \quad u^2 + u + 1 - e^{-v} = 0$$

Să se arate că aceste curbe sînt ortogonale.

R. Notăm cu d, δ operatorii de diferențiere, respectiv pe Γ_1, Γ_2 și cu θ unghiul acestor curbe. Știm că avem formula

$$\cos\theta = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\cdot\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}$$

Calculăm derivatele parțiale

$$x_u = \cos v, \qquad y_u = \sin v, \qquad z_u = 1$$

$$x_v = -u\sin v, \qquad y_v = u\cos v, \qquad z_v = 1$$

și coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței date

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \cos^2 v + \sin^2 v + 1 = 2$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v + 1 = 1$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = u^2(\sin^2 v + \cos^2 v) + 1 = u^2 + 1$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu A numărătorul fracției care dă pe $\cos\theta$, avem

$$A = E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 2du\,\delta u + du\,\delta v + \\ + dv\,\delta u + (u^2+1)\,dv\,\delta v.$$

Să diferențiem acum ecuațiile curbelor, Γ_1, Γ_2. Avem succesiv

$$(\Gamma_1) \quad du - e^v dv = 0, \quad dv = \frac{1}{u}\,du$$

$$(\Gamma_2) \quad (2u+1)\,\delta u + e^{-v}\,\delta v = 0, \quad \delta v = -\frac{2u+1}{u^2+u+1}\,\delta u$$

Înlocuind în expresia lui A, obținem

$$A = 2\,du\,\delta u - \frac{2u+1}{u^2+u+1}\,du\,\delta u + \frac{1}{u}\,du\,\delta u - \frac{(u^2+1)(2u+1)}{u(u^2+u+1)}\,du\,\delta u,$$

$$A = \frac{2u(u^2+u+1) - u(2u+1) + u^2+u+1 - (2u+1)(u^2+1)}{u(u^2+u+1)}\,du\,\delta u,$$

$$A = \frac{(u^2+u+1)(2u+1) - (2u+1)(u^2+u+1)}{u(u^2+u+1)}\,du\,\delta u = 0, \quad du\,\delta u = 0.$$

Rezultă că avem $\cos\theta = 0$, de unde deducem $\theta = \frac{\pi}{2}$, adică curbele Γ_1, Γ_2 sînt ortogonale.

357. Se dă elicoidul drept

$$(S) \qquad x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av, \quad (a > 0)$$

și Γ_1, Γ_2, Γ_3 trei curbe trasate pe suprafața S, date de ecuațiile

$$(\Gamma_1) \quad u = av$$

$$(\Gamma_2) \quad u = -av$$

$$(\Gamma_3) \quad v = 1$$

Să se afle aria triunghiului curbiliniu determinat pe suprafața S de punctele M_1, M_2, M_3, unde

$$M_1 = \Gamma_2 \cap \Gamma_3, \quad M_2 = \Gamma_3 \cap \Gamma_1, \quad M_3 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$$

R. Calculăm derivatele parțiale

$$x_u = \cos v, \quad y_u = \sin v, \quad z_u = 0$$

$$x_v = -u\sin v, \quad y_v = \cos v, \quad z_v = a$$

Coeficienții primei forme fundamentale sînt

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + a^2$$

Elementul de arie a suprafeței S este dat de formula

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \sqrt{u^2+a^2}\,du\,dv$$

Scanned with OKEN Scanner

iar aria triunghiului curbiliniu $\Sigma \equiv M_1M_2M_3$ este dată de

$$\sigma = \iint_\Sigma d\sigma = \iint_\Sigma \sqrt{u^2 + a^2}\, du\, dv$$

Coordonatele curbilinii ale punctelor M_1, M_2, M_3 se obțin rezolvînd sistemele de ecuații

$$(M_1)\ \begin{cases} u = -av \\ v = 1 \end{cases}, \quad (M_2)\ \begin{cases} u = av \\ v = 1 \end{cases}, \quad (M_3)\ \begin{cases} u = av \\ u = -av \end{cases}$$

Rezultă astfel

$$M_1(u = -a,\ v = 1), \qquad M_2(u = a,\ v = 1), \qquad M_3\,(u = 0,\ v = 0)$$

Să calculăm integrala de suprafață. Avem succesiv

$$\sigma = \iint_\Sigma \sqrt{u^2 + a^2}\, du\, dv = 2\int_0^a \sqrt{u^2 + a^2}\, du \cdot \int_{\frac{u}{a}}^1 dv = 2\int_0^a \left(1 - \frac{u}{a}\right)\sqrt{u^2 + a^2}\, du,$$

$$\sigma = \left[-\frac{2}{3a}(u^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} + u\sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2})\right]\Big|_0^a$$

Efectuînd calculele, obținem în definitiv

$$\sigma = \frac{a^2}{3}[2 - \sqrt{2} + \ln(7 + 5\sqrt{2})].$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul X

INTEGRALA DEFINITĂ ŞI NEDEFINITĂ

358. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^3(n^3+k^3)}}.$$

R. Notăm $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^3(n^3+k^3)}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{k^2}{n^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}}.$

Considerăm funcţia $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$, $x\in[0,1]$

Împărţim intervalul $[0,1]$ în n părţi egale cu ajutorul punctelor $x_k=\frac{k}{n}$ $k=0,1,2,\ldots n$.

S_n este o sumă Darboux a funcţiei $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$, continuă pe intervalul $[0,1]$, deci integrabilă.

Avem

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}}=\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^3}}=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1).$$

359. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a^{-\frac{k^3}{n^3}}}{n^3}$, $a>0$

R. Notăm

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\,a^{-\frac{k^3}{n^3}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2a^{-\frac{k^3}{n^3}}$$

Considerăm funcţia $f(x)=x^2a^{-x^3}$, $x\in[0,1]$.

Împărțim intervalul [0, 1] în n părți egale cu ajutorul punctelor $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

S_n este suma Darboux pentru funcția $f(x)$.

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 x^2 a^{-x^3}\,dx = -\frac{1}{3\ln a}\,a^{-x^3}\Big|_0^1 = \frac{1-a^{-1}}{3\ln a}$,

sau, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\,a^{-\frac{k^3}{n^3}} = \frac{a-1}{3a\ln a}$.

360. Folosind definiția integralei, să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției $f(x) = 2^x$, axa Ox și dreptele $x = 0$, $x = 10$.

R. Împărțim intervalul [0, 10] în n părți egale cu ajutorul punctelor $x_k = \frac{10}{n}k$, $\quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Notăm $h = x_{k+1} - x_k = \frac{10}{n}$ și cu σ_n suma

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{x_k} h = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{hk}\cdot h,$$

sau $\sigma_n = h\,\frac{2^{nh}-1}{2^h-1}$.

Funcția $f(x) = 2^x$ fiind integrabilă pe [0, 10] rezultă $A = \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\cdot\frac{2^{10}-1}{2^{\frac{10}{n}}-1} = \frac{2^{10}-1}{\ln 2}, \quad \text{deoarece}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10}{n}}{2^{\frac{10}{n}}-1} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Deci, $A = \int_0^{10} 2^x\,dx = \frac{2^{10}-1}{\ln 2}$.

361. Folosind definiția integralei, să se calculeze $\int_a^b \sin x\,dx$

R. Împărțim intervalul $[a, b]$ în n părți egale.

Notăm $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $\quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$ și

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(x_{k+1} - x_k)\sin x_k = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\sin\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right),$$

sau

$$S_n = \frac{\sin\left(a + n\cdot\frac{b-a}{2n}\right)\sin\frac{n-1}{2}\cdot\frac{b-a}{n}}{\sin\frac{b-a}{2n}}\cdot\frac{b-a}{n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcția $f(x) = \sin x$ este integrabilă pe $[a, b]$ deci

$$\int_a^b \sin x\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2} = \cos a - \cos b.$$

Să se calculeze următoarele integrale:

5. $I(x) = \int \frac{\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx, \quad x > 0.$

R. $I(x) = \int (x^{-\frac{1}{4}} - 5x^{-\frac{1}{12}} + x^{-\frac{3}{4}})\,dx = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x^4} - \frac{60}{11}\sqrt[12]{x^{14}} + 4\sqrt[4]{x} + C.$

362. $I(x) = \int \frac{\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^4 - x^4}}\,dx, \quad |x| < a, \quad a > 0.$

R. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} - \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$

Pentru a calcula $J(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ facem schimbarea de variabilă $x = a\,\mathrm{sh}\,t$, $dx = a\,\mathrm{ch}\,t$. Avem,

$$K(t) = \int \frac{a\,\mathrm{ch}\,t\,dt}{a\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}} = \int dt = t + C$$

de unde, $J(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$, iar

$$I(x) = \arcsin\frac{x}{a} - \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

363. $I(x) = \int \frac{dx}{x(\ln x + 2)}, \quad x > 0, \quad \ln x + 2 \neq 0.$

R. Facem substituția $\ln x = t$, $dt = \frac{dx}{x}$ și obținem

$$G(t) = \int \frac{dt}{t+2} = \ln|t+2| + C, \quad \text{deci}$$

$$I(x) = \ln|\ln x + 2,| \quad x \neq e^{-2}.$$

364. $I(x) = \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}\,dx}{x^3}, \quad x \neq 0$

R. Avem $x^4 + x^{-4} + 2 = (x^2 + x^{-2})^2$, deci

$$I(x) = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^5} = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.$$

365. $I(x) = \int \frac{2^{x+1} - 3^{x-1}}{6^x}\,dx.$

R. $I(x) = \int \left(2\frac{1}{3^x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^x}\right)dx = -\frac{2}{3^x \ln 3} + \frac{1}{3\cdot 2^x \ln 2} + C.$

Scanned with OKEN Scanner

366. $I(x)=\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,dx, \quad a\neq b.$

R. Putem scrie: $I(x)=\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{\frac{b^2+a^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2x}}=$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\int \frac{d\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2x\right)}{\sqrt{\frac{b^2+a^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2x}}=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}+C.$$

367. $I(x)=\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt[5]{\operatorname{th}^2 x}}, \quad x\neq 0$

R. Facem substituția $\operatorname{th} x=t$, $dt=\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$, și obținem,

$$G(t)=\int \frac{dt}{\sqrt[5]{t^2}}=\frac{5}{3}\sqrt[5]{t^3}+C.$$

De unde, $I(x)=\frac{5}{3}\sqrt[5]{\operatorname{th}^3 x}+C.$

368. $I(x)=\int \cos^n x\sin^3 x\,dx, \quad x\in[0,2\pi), \quad n\neq -1, \quad n\neq -3$

R. Facem substituția $\cos x=t$, $dx=-\sin x\,dt$ și obținem:

$$G(t)=-\int t^n(1-t^2)\,dt=\frac{t^{n+3}}{n+3}-\frac{t^{n+1}}{n+1}+C,$$

de unde,

$$I(x)=\frac{\cos^{n+3} x}{n+3}-\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}+C.$$

369. $I(x)=\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx, \quad x\neq 0.$

R. Putem scrie $\frac{x^2-1}{x^4+1}=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}$. Facem substituția

$x+\frac{1}{x}=t$, $dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$, $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, rezultă

$$G(t)=\int \frac{dt}{t^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C.$$

$$I(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C.$$

Scanned with OKEN Scanner

370. $I(x) = \int \cos^8 x\, dx, \qquad x \in \mathbf{R}.$

R. Folosim formulele lui Euler, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, obținem,

$$\cos^8 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^8 = \frac{1}{2^8}(e^{8ix} + e^{-8ix}) + C_8^1(e^{6ix} + e^{-6ix}) +$$
$$+ C_8^2(e^{4ix} + e^{-4ix}) + C_8^3(e^{2ix} + e^{-2ix}) + C_8^4 =$$
$$= \frac{1}{2^7}\left(\cos 8x + C_8^1 \cos 6x + C_8^2 \cdot \cos 4x + C_8^3 \cos 2x + \frac{1}{2} C_8^4\right)$$

de unde,

$$I(x) = \frac{1}{2^7}\left(\frac{\sin 8x}{8} + C_8^1 \frac{\sin 6x}{6} + C_8^2 \frac{\sin 4x}{4} + C_8^3 \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2} C_8^4 x\right) + C$$

371. $I(x) = \int \operatorname{sh}^4 x\, dx, \qquad x \in \mathbf{R}.$

R. Avem $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, de unde

$$\operatorname{sh}^4 x = \frac{1}{2^4}[e^{4x} + e^{-4x} - 4(e^{2x} + e^{-2x}) + 6] = \frac{1}{2^3}(\operatorname{ch} 4x - 4\operatorname{ch} 2x + 3).$$

Rezultă,

$$I(x) = \frac{1}{2^3}\left(\frac{\operatorname{sh} 4x}{4} - 2\operatorname{sh} 2x + 3x\right) + C.$$

372. $I(x) = \int \sin 5x \sin 9x\, dx, \quad x \in \mathbf{R}.$

R. Din relația $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ obținem, $\sin 5x \sin 9x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x)$, de unde

$$I(x) = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{28}\sin 14x + C.$$

373. $I(x) = \int \frac{dx}{\sin x}, \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad x \neq k\pi. \qquad (k \text{ întreg}).$

R. Putem scrie

$$I(x) = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

374. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\, dx, \qquad (x-a)(b-x) > 0, \qquad a \neq b$

R. Facem schimbarea de variabilă, $x = a + (b-a)\sin^2 t$,

$$dx = 2(b-a)\sin t \cos t\, dt, \quad b - x = (b-a)\cos^2 t.$$

$$G(t) = 2\int \frac{(b-a)\sin t \cos t\, dt}{(b-a)^2 \sin^2 t \cos^2 t} = 2t + C.$$

Scanned with OKEN Scanner

De unde,

$$I(x) = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C, \qquad \frac{x-a}{b-a} > 0.$$

Folosind metoda integrării prin părți să se calculeze:

375. $I(x) = \int (x^3 + x^2 - 2x + 2)\, e^{2x}\, dx, \quad x \in \mathbf{R}.$

R. Notăm $u = x^3 + x^2 - 2x + 2, \quad du = (3x^2 + 2x - 2)\, dx,$

$dv = e^{2x}\, dx, \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$. Folosim formula

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

$$I(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 - 2x + 2)\, e^{2x} - \frac{1}{2}\int (3x^2 + 2x - 2)\, e^{2x}\, dx$$

Notăm $u = 3x^2 + 2x - 2, \quad du = (6x + 2)\, dx, \; dv = e^{2x}\, dx, \; v = \frac{1}{2} e^{2x}$.

Rezultă,

$$I(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 - 2x + 2) - \frac{1}{4}(3x^2 + 2x - 2)\, e^{2x} + \\ + \frac{1}{4}\int (6x + 2)\, e^{2x}\, dx$$

Integrăm încă odată prin părți și obținem

$$I(x) = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{4} + \frac{11}{8}\right) e^{2x} + C.$$

376. $I(x) = \int (x^2 + 2x - 3) \cos 3x\, dx, \quad x \in \mathbf{R}.$

R. Notăm $u = x^2 + 2x - 3, \quad du = (2x + 2)\, dx, \quad dv = \cos 3x\, dx$ $v = \frac{1}{3} \sin 3x$ și obținem,

$$I(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 3) \sin 3x - \frac{1}{3}\int (2x + 2) \sin 3x\, dx$$

Procedînd în mod asemănător rezultă,

$$I(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + 2x - \frac{29}{9}\right) \sin 3x + \frac{2}{9}(x + 1) \cos^3 x + C.$$

377. $I(x) = \int \cos(\ln x)\, dx, \quad x > 0.$

R. Notăm $u = \cos(\ln x); \quad du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x)\, dx, \quad dv = dx \quad v = x,$ rezultă

$$I(x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx$$

Scanned with OKEN Scanner

Notăm $u = \sin \ln x$, $du = \frac{1}{x} \cos \ln x \, dx$, $dv = dx$

$$I(x) = x \cos(\ln x) + x \sin \ln x - I(x), \quad \text{de unde}$$

$$I(x) = \frac{1}{2} x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C.$$

378. $I(x) = \int e^{-ax} \sin bx \, dx, \qquad x \in R.$

R. Metoda I. Notăm $u = \sin bx$, $du = b \cos bx \, dx$, $dv = e^{-ax} dx$, $v = -\frac{1}{a} e^{-ax}$ și obținem,

$$I(x) = -\frac{1}{a} e^{-ax} \sin bx + \frac{b}{a} \int e^{-ax} \cos bx \, dx.$$

Notăm $u = \cos bx$; $du = -b \sin bx \, dx$, rezultă

$$I(x) = -\frac{1}{a} e^{-ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{-ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} I(x), \quad \text{de unde}$$

$$I(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax}.$$

Metoda II. Considerăm $J(x) = \int e^{-ax} \cos bx \, dx$ și calculăm

$$J(x) + iI(x) = \int e^{-ax} e^{ibx} dx = \int e^{-(a-ib)x} dx =$$

$$= -\frac{1}{a - ib} e^{-(a-ib)x} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2} e^{-ax}(\cos bx + i \sin bx) =$$

$$= -\frac{1}{a^2 + b^2}[a \cos bx - b \sin bx + i(a \sin bx + b \cos bx)] e^{-ax} + C.$$

De aici, $J(x) = \int e^{-ax} \sin bx \, dx = -\frac{a \cos bx - b \sin bx}{a^2 + b^2} + C$ și,

$$I(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} + C.$$

379. $I_{m,n}(x) = \int x^n \ln^m x \, dx, \qquad x > 0, \quad n \neq -1, \quad m \in N.$

R. Notăm $u = \ln^m x$, $du = \frac{m}{x} \ln^{m-1} x \, dx$, $dv = x^n dx$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, avem,

$$I_{m,n}(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln^m x - \frac{m}{n+1} \int x^n \ln^{m-1} x \, dx =$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln^m x - \frac{m}{n+1} \cdot I_{m-1,n}(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Procedînd în mod analog pentru $I_{m-1,\,n}(x)$, obținem prin recurență

$$I_{m,\,n}(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\ln^m x-\frac{m}{n+1}\ln^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{(n+1)^2}\ln^{m-2}x+\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^p\frac{m(m-1)\ldots(n-p+1)}{(n+1)^p}\ln^{m-p}x+\ldots+(-1)^m\frac{m}{(n+1)^m}\right]+C$$

Pentru $n=-1$ obținem

$$I_{m,\,-1}(x)=\int\frac{\ln^m x}{x}\,dx=\frac{1}{m+1}\ln^{m+1}x+C,\qquad x\in(0,\infty).$$

380. $\mathrm{I}(x)=\int\frac{x\,e^{m\,\mathrm{arctg}\,x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx,\qquad x\in\mathbf{R}.$

R. Notăm $u=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $du=\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$, $dv=\frac{e^{m\,\mathrm{arctg}\,x}}{1+x^2}dx$, $v=\frac{1}{m}e^{m\,\mathrm{arctg}\,x}$ și obținem,

$$I(x)=\frac{x}{m\sqrt{1+x^2}}e^{m\,\mathrm{arctg}\,x}-\frac{1}{m}\int\frac{e^{m\,\mathrm{arctg}\,x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$$

Notăm $u=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $du=-\frac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}$, obținem

$$I(x)=\frac{x\,e^{m\,\mathrm{arctg}\,x}}{m\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{m^2}\frac{e^{m\,\mathrm{arctg}\,x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{m^2}\mathrm{I}(x),$$

de unde, $\mathrm{I}(x)=\frac{mx-1}{(m^2+1)\sqrt{1+x^2}}e^{m\,\mathrm{arctg}\,x}+C.$

381. $\mathrm{I}_m(x)=\int x^m e^{ax}\,dx,\qquad x\in\mathbf{R},\qquad m\in\mathbf{N}.$

R. Luăm $u=x^m$, $dv=e^{ax}\,dx$, $du=mx^{m-1}\,dx$, $v=\frac{1}{a}e^{ax}$.

Avem

$$I_m(x)=\frac{1}{a}x^m e^{ax}-\frac{m}{a}\int x^{m-1}e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}[x^m e^{ax}-m\,\mathrm{I}_{m-1}(x)].$$

Am obținut astfel o formulă de recurență. Rezultă

$$I_m(x)=\frac{1}{a}e^{ax}\left[x^n-\frac{m}{a}x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{a^2}x^{m-2}+\ldots+\right.$$

$$\left.+(-1)^p\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{a^p}x^{m-p}+\ldots+(-1)^m\frac{m!}{a^m}\right]+C.$$

Scanned with OKEN Scanner

382. $I_1(x) = \int e^{nx} \cos^2 mx\, dx, \quad I_2(x) = \int e^{nx} \sin^2 mx\, dx.$

R. $I_1(x) + I_2(x) = \int e^{nx}\, dx = \frac{1}{n} e^{nx}.$

$$I_1(x) - I_2(x) = \int e^{nx} \cos 2mx\, dx = \frac{2m \sin mx + n \cos 2mx}{n^2 + 4m^2} e^{nx}$$

(vezi exercițiul 23, metoda II).

De unde, $I_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{2m \sin 2mx + n \cos 2mx}{n^2 + 4m^2}\right] e^{nx} + C_2$ și

$$I_1(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{2m \sin 2mx + n \cos 2mx}{n^2 + 4m^2}\right) e^{nx} + C_1.$$

383. $I(x) = \int x \arcsin \sqrt{\frac{2}{x}}\, dx, \quad x \in (2, +\infty).$

R. Notăm $u = \arcsin \sqrt{\frac{2}{x}}, \quad du = -\frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{x+2}} dx, \quad dv = x\, dx,$

$v = \frac{x^2}{2}$, avem

$$I(x) = \frac{x^2}{2} \arcsin \sqrt{\frac{2}{x}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\, dx.$$

Notăm $x + 2 = t^2, \quad x = t^2 - 2, \quad dx = 2t\, dt.$

Avem, $J(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\, dx = 2\int (t^2 - 2)\, dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - 2t\right) + C,$

$$I(x) = \frac{x^2}{2} \arcsin \sqrt{\frac{2}{x}} + \sqrt{2}\left[\frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{3} - \sqrt{x+2}\right] + C.$$

384. Să se calculeze

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad |x| > a, \quad a > 0.$$

R. Facem schimbarea $x = a \operatorname{ch} t, \quad dx = a \operatorname{sh} t$ și avem,

$$I(t) = \int \frac{a \operatorname{sh} t\, dt}{\sqrt{a^2(\operatorname{ch}^2 t - 1)}} = \int dt = t + C, \quad \text{de unde}$$

$$I(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

385. Să se arate că dacă $y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$ atunci

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(\frac{y'}{2} + \sqrt{ay}\right) + C, & a > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, & a < 0. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

R. $y' = 2ax + b$

1) $a > 0$, $\quad y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(\frac{y'}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$.

Deci,

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d\left(\frac{y'}{2a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{y'}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(\frac{y'}{2a} + \sqrt{\left(\frac{y'}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}\right) + C$$

sau

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(\frac{y'}{2a} + \frac{\sqrt{a(ax^2 + bx + c)}}{a}\right) + C, \text{ care se mai poate scrie}$$

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(\frac{y'}{2} + \sqrt{ay'}\right) + C.$$

2) Dacă $a < 0$, atunci $-a > 0$ și

$$y = -a\left[\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right] = -a\left[\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - \left(\frac{y'}{2a}\right)^2\right],$$

deci

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{d\left(\frac{y'}{2a}\right)}{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a} - \left(\frac{y'}{2a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C.$$

386. Să se calculeze

$$I(x) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{5 + x - x^2}}, \quad 5 + x - x^2 > 0.$$

R. $I(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{(1 - 2x)\,dx}{\sqrt{5 + x - x^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{5 + x - x^2}}$.

Folosim exercițiul 385. ($a = -1$) și obținem

$$I(x) = -\sqrt{5 + x - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1 - 2x}{\sqrt{21}} + C.$$

Să se calculeze următoarele integrale:

387. $I(x) = \int \frac{x^2 + 2x - 4}{x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)}\,dx, \quad x \notin \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

R. Descompunem integrantul în elemente simple

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{x - 2} + \frac{E}{x + 2}.$$

Pentru a afla pe A înmulțim ambii membrii ai identității cu x,

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)} = A + x\frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{x - 2} + \frac{E}{x + 2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dăm lui x valoarea 0 și obținem

$$A = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}\Big|_{x=0} = -1$$

În mod asemănător:

$$B = \frac{x^2 + 2x - 4}{x(x+1)(x-2)(x+2)}\Big|_{x=1} = \frac{1}{6}, \quad C = \frac{5}{6}, \quad D = \frac{1}{6}, \quad E = -\frac{1}{6}.$$

De unde,

$$I(x) = -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x-1| + \frac{5}{6}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x-2| -$$

$$-\frac{1}{6}\ln|x+2| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^5(x-1)(x-2)}{x^6(x+2)}\right| + C.$$

388. $I(x) = \int \frac{x^3 + 3x - 2}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx, \quad x \in \mathbf{R} - \{-2, 1\}.$

R. Descompunem în elemente simple

$$\frac{x^3 + 3x - 2}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

B și D se determină ca în exercițiul 387,

$$B = \frac{x^3 + 3x - 2}{(x+2)^2}\Big|_{x=1} = \frac{2}{9}, \quad D = \frac{x^3 + 3x - 2}{(x-1)^2}\Big|_{x=-2} = \frac{-10}{9}$$

Pentru calculul lui A și C facem pe $x = 0$ și înmulțim identitatea cu x făcînd apoi $x \to +\infty$, obținem

$$A + C = 1, \quad -A + \frac{C}{2} = -\frac{4}{9}, \quad \text{de unde: } A = \frac{17}{27}, \quad C = \frac{10}{27}$$

$$I(x) = \frac{17}{27}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{10}{27}\int \frac{dx}{x+2} - \frac{10}{9}\int \frac{dx}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{17}{27}\ln|x-1| - \frac{2}{9}\,\frac{1}{x-1} + \frac{10}{27}\ln|x+2| + \frac{10}{9}\,\frac{1}{x+2} + C =$$

$$= \frac{1}{27}\ln|x^{17}(x+2)^{10}| + \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{x+2} - \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-1} + C.$$

389. $I(x) = \int \frac{-x^3 + 4x - 1}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 2)}\,dx, \quad x \neq 1.$

R. Deoarece $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ și $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ are rădăcini complexe rezultă

$$\frac{-x^3 + 4x - 1}{(x-1)^2(x^2 - 2x + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem,

$$B = \frac{-x^3 + 4x - 1}{x^2 - 2x - 1}\Big|_{x=1} = 2$$

Facem $x = 0$, $x = -1$ și după înmulțirea identității cu x facem $x \to +\infty$, obținem

$$A = 1, \quad C = -2, \quad D = -3.$$

Deci,

$$I(x) = \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{2x+3}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+2} - 5\int \frac{dx}{(x-1)^2+1} =$$

$$= \ln|x-1| - \ln(x^2-2x+2) - \frac{2}{x-1} - 5\operatorname{arctg}(x-1) + C =$$

$$= \ln\frac{|x-1|}{x^2-2x+2} - \frac{2}{x-1} - 5\operatorname{arctg}(x-1) + C.$$

390. $I(x) = \int \frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^4}\,dx, \quad x \in \mathbf{R}.$

R. Putem scrie

$$I(x) = \frac{1}{2}\int \frac{6x+2}{(x^2+2x+2)^4}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^4}\,dx - 6\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^4} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+2x+2)^3} - 6\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^4}.$$

Notăm $I_4 = \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^4} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+1)^4}.$

Folosim formula de recurență

$$I_n = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{u}{2a^2(n-1)\,(u^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\,I_{n-1}$$ [1]

În cazul de mai sus avem $u = x+1$, $a = 1$, $n = 4$

$$I_4 = \frac{x+1}{6(x^2+2x+2)^3} + \frac{5}{6}\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^3},$$

$$I_3 = \frac{x+1}{4(x^2+2x+2)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2},$$

$$I_2 = \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)$$

---

[1]) Roșculeț, M. *Analiză matematică*, vol. II, 1966, Buc. Ed. didactică și pedagogică.

Scanned with OKEN Scanner

de unde,

$$I(x) = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+2)^3} - \frac{5}{4}\cdot\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2} - \frac{15}{8}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+1} -$$

$$-\frac{15}{8}\operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

391. $I(x) = \int \frac{x^2-2}{(x^2+1)(x^2-1)(x^2+4)}\,dx, \quad x \neq -1, \quad x \neq 1.$

R. Se observă că integrantul este o funcție pară, facem $x^2 = u$ și obținem,

$$\frac{u-2}{(u+1)(u-1)(u+4)} = \frac{1}{u+1} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{u+4},$$

$$A = \frac{u-2}{(u+1)(u-1)(u+4)}\Big|_{u=-1} = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{10}, \quad C = -\frac{2}{5};$$

deci,

$$I(x) = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{10}\int\frac{dx}{x^2-1} - \frac{2}{5}\int\frac{dx}{x^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{20}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

392. $I(x) = \int \frac{x^2+1}{x(x^2+2)(x^2+9)}\,dx, \quad x \neq 0.$

R. Integrantul fiind o funcție impară putem scrie,

$$\frac{x^2+1}{x(x^2+2)(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx}{x^2+2} + \frac{Cx}{x^2+9},$$

unde, $A = \frac{x^2+1}{(x^2+2)(x^2+9)}\Big|_{x=0} = \frac{1}{18}.$

Înmulțind identitatea cu x și făcînd $x \to +\infty$ și apoi $x = 1$ obținem

$B + C = -\frac{1}{18}$, $\frac{B}{3} + \frac{C}{10} = \frac{1}{80}$, rezultă, $B = \frac{5}{126}$, $C = -\frac{4}{63}$.

Deci,

$$I(x) = \frac{1}{18}\int\frac{dx}{x} + \frac{5}{126}\int\frac{x\,dx}{x^2+2} - \frac{4}{63}\int\frac{x\,dx}{x^2+9} =$$

$$= \frac{1}{18}\ln|x| + \frac{5}{252}\ln(x^2+2) - \frac{2}{63}\ln(x^2+9) + C.$$

393. $I(x) = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}, \quad x \in (-\pi, \pi).$

R. Facem schimbare de variabilă

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$J(t)=\int\frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{2\dfrac{dt}{1+t^2}-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+5}=\int\frac{dt}{3t^2+2t+2}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}=\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{5}+C.$$

Deci,

$$I(x)=\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{5}+C.$$

394. $I(x)=\int\frac{\sin^5 x}{\cos^6 x}\,dx \qquad x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}.$

R. Notăm $R(\sin x,\ \cos x)=\frac{\sin^5 x}{\cos^6 x}$. Avem

$$R(-\sin x,\ \cos x)=-R(\sin x,\ \cos x).$$

Facem substituţia $\cos x=t$, $-\sin x\,dx=dt$ şi rezultă

$$J(t)=-\int\frac{(1-t^2)^2}{t^6}\,dt=\frac{1}{5t^5}-\frac{2}{3t^3}+\frac{1}{t}+C.$$

De unde,

$$I(x)=\int\frac{1}{5\cos^5 x}-\frac{2}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+C.$$

395. $I(x)=\int\frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\,dx, \qquad x\neq k\pi$

R. $R(\sin x,\ \cos x)=\frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}$, $R(\sin x,\ -\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$.

Facem substituţia $\sin x=t$, $\cos x\,dx=dt$.

Avem,

$$J(t)=\int\frac{(1-t^2)^2}{t^4}\,dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{2}{t}+t+C.$$

Deci,

$$I(x)=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{2}{\sin x}+\sin x+C.$$

396. $I(x)=\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}, \qquad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right), \qquad a^2+b^2\neq 0.$

R. $R(\sin x,\ \cos x)=\frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $R(-\sin x,\ \cos x)=$

$$=R(\sin x,\ \cos x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Facem substituția $\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t,$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{și obținem}$$

$$J(t) = \int \frac{dt}{b^2 + a^2t^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} t + C.$$

Deci, $I(x) = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} x + C.$

397. Să se calculeze

$$I(x) = \int \frac{2\sqrt[3]{\operatorname{tg} x + 1}\, dx}{(1 + \cos 2x)\sqrt[3]{\operatorname{tg} x - 1} \cdot (\operatorname{tg} x + 1)}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}.$$

R. Facem substituția $\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t,$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad 1 + \cos 2x = 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Obținem,

$$J(t) = \int \frac{1}{t+1} \sqrt[3]{\frac{t+1}{t-1}}\, dt.$$

Facem substituția $u = \sqrt[3]{\frac{t+1}{t-1}}$, de unde $t = \frac{u^3+1}{u^3-1}$, $dt = \frac{-6u^2\, du}{(u^3-1)^2}$

$1 + t = \frac{2u^3}{u^3-1}$ și obținem, $H(u) = -3\int \frac{du}{u^3-1}.$

Descompunem în elemente simple;

$$\frac{1}{u^3-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+C}{u^2+u+1} \quad \text{și rezultă,} \quad A = \frac{1}{u^2+u+1}\Big|_{u=1} = \frac{1}{3}$$

iar dacă facem $u = 0$ și apoi înmulțim identitatea cu u și facem $u \to \infty$, obținem $B = -\frac{1}{3}; \quad C = -\frac{2}{3}.$

$$H(u) = -\int \frac{du}{u-1} + \int \frac{u+3}{u^2+u+1}\, du = \frac{1}{2} \ln \frac{u^2+u+1}{(u-1)^2} +$$

$$+ \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2u+1}{3} + C.$$

$$I(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}\right)^2} + \sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}} + 1}{\left(\sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}} - 1\right)^2} +$$

$$+ \sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}} + 1\right) + C.$$

Scanned with OKEN Scanner

398. $I(x)=\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}, \quad x\in\mathbf{R}.$

R. $\sqrt{x^2+x+1}=t-x, \quad x=\frac{t^2-1}{1+2t}, \quad dx=2\frac{(t+1)^2}{(1+2t)^2}dt,$

$$J(t)=2\int\frac{1+2t+t^2}{t(1+2t)^2}dt.$$

Descompunem în elemente simple

$$\frac{1+2t+t^2}{t(1+2t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{(1+2t)^2}, \quad \text{unde}$$

$$C=\left.\frac{1+2t+t^2}{t}\right|_{t=-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}, \quad A=1, \quad B=-\frac{3}{2}.$$

$$J(t)=2\int\frac{dt}{t}-3\int\frac{dt}{1+2t}-\int\frac{dt}{(1+2t)^2}=2\ln|t|-$$

$$-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{1}{2}\frac{1}{1+2t}+C, \quad \text{de unde}$$

$$I(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+\sqrt{x^2+x+1})^2}{(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})^3}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}}+C.$$

399. $I(x)=\int\frac{dx}{x+\sqrt{9-5x-x^2}}, \quad x\in\left[\frac{-5-\sqrt{61}}{2}, \frac{-5+\sqrt{61}}{2}\right].$

R. Facem substituția $\sqrt{9-5x-x^2}=tx+3,$

$$x=-\frac{6t+5}{t^2+1}, \quad dx=-2\frac{3t^2+5t-3}{(t^2+1)^2}dt,$$

$$x+\sqrt{9-x^2-5x}=3-\frac{6t^2+5t}{t^2+1}-\frac{6t+5}{t^2+1}=-\frac{3t^2+11t+2}{t^2+1},$$

de unde,

$$J(t)=-2\int\frac{3t^2+5t-3}{(t^2+1)(3t^2+11t+2)}dt$$

Descompunem integrantul în elemente simple:

$$\frac{3t^2+5t-3}{(t^2+1)(3t^2+11t+2)}=\frac{At+B}{t^2+1}+\frac{Ct+D}{3t^2+11t+2}$$

Identificînd obținem, $A=\frac{1}{2}, \quad B=\frac{1}{2}, \quad C=-\frac{3}{2}, \quad D=3.$

$$J(t)=\frac{1}{2}\int\frac{t+1}{t^2+1}dt-\frac{1}{2}\int\frac{3t-6}{3t^2+11t+2}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(t^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t-\frac{1}{4}\ln|3t^2+11t+2|+$$

$$+\frac{23}{\sqrt{97}}\ln\left|\frac{6t+11-\sqrt{97}}{6t+11+\sqrt{97}}\right|+C,$$

unde, $t=\frac{\sqrt{9-5x-x^2}-3}{x}, \quad x\neq 0.$

Scanned with OKEN Scanner

400. $I(x)=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx, \quad x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

R. $\sqrt{x^2+3x+2}=t(x+1), \quad x=\frac{t^2-2}{1-t^2}, \quad dx=-\frac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt,$

$$x+\sqrt{x^2+3x+2}=\frac{t^2-t-2}{1-t^2}, \quad x-\sqrt{x^2+3x+2}=\frac{t^2+t-2}{1-t^2}.$$

De unde,

$$J(t)=-\frac{5}{18(t+1)}-\frac{1}{6(t+1)^2}+\frac{3}{2}\ln|t-1|-$$

$$-\frac{16}{27}\ln|t-2|-\frac{17}{108}\ln|t+1|+C$$

unde $t=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}, \quad x\neq -1.$

401. $I(x)=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}, \quad x^4+2x^2-1>0, \quad x\neq 0.$

R. Facem substituţia $t=\frac{1}{x^2}, \quad dt=-\frac{2}{x^3}\,dx.$ Rezultă $J(t)=-2\int\frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}.$ Facem schimbarea de variabilă $\sqrt{1+2t-t^2}=1+tu$ şi obţinem

$$H(u)=4\int\frac{u^2-2u-1}{(1+u^2)(3u^2-2u+1)}\,du.$$

Avem

$$\frac{u^2-2u-1}{(1+u^2)(3u^2-2u+1)}=\frac{Au+B}{1+u^2}+\frac{Cu+D}{3u^2-2u+1}, \quad \text{cu}$$

$$A=0, \quad B=+1, \quad C=0, \quad D=-2$$

$$H(u)=4\int\frac{du}{1+u^2}-\frac{8}{3}\int\frac{du}{\left(u+\frac{1}{3}\right)+\frac{8}{9}}=4\operatorname{arctg}u-\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3u+1}{2\sqrt{2}}+C$$

unde, $u=x(\sqrt{1+2x-x^2}-1).$

402. $I(x)=\int\frac{x\,dx}{1-\sqrt[3]{x^2}}, \quad x\in(-1,1).$

R. $1-\sqrt[3]{x^2}=t^2, \quad x^2=(1-t^2)^3, \quad x\,dx=-3t(1-t^2)^2\,dt$

$$J(t)=-3\int\frac{(1-t^2)\,dt}{t}=-\frac{3}{4}t^4+3t-3\ln|t|+C$$

$$I(x)=-\frac{3}{4}\sqrt{(1-\sqrt[3]{x^2})^4}+3\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}-3\ln\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}+C.$$

Scanned with OKEN Scanner

403. $I(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}} dx, \quad x \neq 0.$

R. Integrantul este $f(x) = x^{-1}(1+x^2)^{-\frac{1}{3}}$. Facem schimbarea de variabilă dată de $t = \sqrt[3]{1+x^2}$, $t^3 = 1+x^2$, de unde $x = \sqrt{t^3-1}$, $dx = \frac{3t^2\,dt}{2\sqrt{t^3-1}}$, deci

$$G(t) = \frac{3}{2}\int \frac{t\,dt}{t^3-1}.$$

Descompunem în elemente simple:

$$\frac{t}{t^3-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}.$$

Prin identificare rezultă $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{2}$, de unde

$$G(t) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t^2+t+1} dt = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\int \frac{2t+1-3}{t^2+t+1} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\ln(t^2+t+1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{3} + C$$

Deci

$$I(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^2}+1}{3} + C$$

404. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$

R. Facem substituția

$$1+x^4 = t^4x^4, \text{ sau } x = (t^4-1)^{-\frac{1}{4}}, \quad dx = -t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}} dt$$

$$\sqrt[4]{1+x^4} = t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}, \text{ de unde}$$

$$G(t) = -\int \frac{t^2}{t^4-1} dt = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

Rezultă

$$I(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^4+1}+x}{\sqrt[4]{x^4+1}-x}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x} + C.$$

Scanned with OKEN Scanner

405. $I(x)=\int \frac{dx}{(e^{\frac{x}{6}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{2}}+1)}$, $x\in\mathbf{R}$.

R. Facem schimbarea de variabilă $t=e^{\frac{x}{6}}$, $x=6\ln t$, $t>0$, $dx=\frac{6\,dt}{t}$, de unde,

$$G(t)=6\int\frac{dt}{t(1+t+t^2+t^3)}=6\int\frac{dt}{t(1+t)(t^2+1)}.$$

Descompunem în elemente simple

$$\frac{1}{t(1+t)(t^2+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{1+t^2},$$

unde

$$A=1,\quad B=-\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{2},\quad D=-\frac{1}{2}.$$

Avem

$$G(t)=6\int\frac{dt}{t}-3\int\frac{dt}{t+1}-3\int\frac{t+1}{t^2+1}dt=$$

$$=3\ln\frac{t^2}{(t+1)\sqrt{t^2+1}}-3\operatorname{arctg}t+C,\quad t=e^{\frac{x}{6}}.$$

406. $I(x)=\int\frac{\operatorname{sh}2x+\operatorname{ch}2x}{\sqrt[3]{(e^{3x}-1)^5}}dx$, $x\neq 0$

R. $\operatorname{sh}2x+\operatorname{ch}2x=e^{2x}$. Facem substituția $e^x=t$. Obținem

$$G(t)=\int\frac{t\,dt}{\sqrt[3]{(t^3-1)^5}}=\int t(t^3-1)^{-\frac{5}{3}}dt.$$

Facem substituția, $t^3-1=u^3t^3$, $t=(1-u^3)^{-\frac{1}{3}}$,

$$dt=u^2(1-u^3)^{-\frac{4}{3}}du,\quad (t^3-1)^{-\frac{5}{3}}=u^{-5}(1-u^3)^{\frac{5}{3}}.$$

Rezultă

$$H(u)=-\int u^2(1-u^3)^{-\frac{4}{3}}(1-u^3)^{-\frac{1}{3}}u^{-5}(1-u^3)^{\frac{5}{3}}du=-\int\frac{du}{u^3}=\frac{1}{2u^2}+C,$$

deci

$$I(x)=\frac{e^{2x}}{2\sqrt[3]{(e^{3x}-1)^2}}+C.$$

407. $I(x)=\int\frac{x\,dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$, $x\in(-1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3})$.

R. Putem scrie $\frac{x}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}=\frac{x}{[3+(1-x)^2]\sqrt{3-(1-x)^2}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Facem schimbarea $1 - x = \sqrt{3}\sin t$, $dx = -\sqrt{3}\cos t\,dt$ de unde,

$$G(t) = \int \frac{-\sqrt{3}\cos t(1+\sqrt{3}\sin t)\,dt}{3(1+\sin^2 t)\sqrt{3-3\sin^2 t}},$$

sau

$$G(t) = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt - \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{\sin t\,dt}{1+\sin^2 t}.$$

Calculăm integralele

$$I' = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt \quad \text{și} \quad I'' = -\frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt$$

și obținem

$$I(x) = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{3}} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}\right| + C.$$

408. $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{\cos^3 x - \sin^3 x}$.

R. Facem schimbarea $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$. Descompunem integrala astfel

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\cos^3 x - \sin^3 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{\cos^3 x - \sin^3 x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^3 x(1-\operatorname{tg}^3 x)} +$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\cos^3 x(1-\operatorname{tg}^3 x)} = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dt}{1-t^3} + \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1-t^3}$$

Avem, $\frac{1}{1-t^3} = \frac{A}{1-t} + \frac{Bt+C}{1+t+t^2}$. Folosind metoda identificării, găsim

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}.$$

Notăm $I_1 = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dt}{1-t^3}$, $I_2 = \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1-t^3}$

Deci,

$$I_1 = -\frac{1}{3}\ln(t-1)\Big|_{\sqrt{3}}^{\infty} + \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)\Big|_{\sqrt{3}}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{3}\Big|_{\sqrt{3}}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\Big|_{\sqrt{3}}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{3}\Big|_{\sqrt{3}}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{4+\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$I_2 = -\frac{1}{3}\ln|1-t|\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{3}\Big|_{-\infty}^{0} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{(1-t)^2}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-\infty}^{0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$I = -\frac{1}{6}\ln\frac{4+\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} + \frac{7\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}+1}{3}.$$

409. $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

R. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{2-\sin^2 2x}{2}$.

Avem

$$I = 2\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\sin^2 2x} = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin^2 2x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin^2 2x} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{dx}{2-\sin^2 2x}\right].$$

Facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Rezultă

$$I = 2\left[\int_0^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}dt + \int_{-\infty}^{0} \frac{1+t^2}{1+t^4}dt\right] =$$

$$= 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}dt = 8\int_0^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}dt.$$

Putem scrie $I = 8\int_0^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt}{t^2+\frac{1}{t^2}} = 8\int_0^{\infty} \frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{t^2+\frac{1}{t^2}}$

Facem substituţia $t - \frac{1}{t} = u$, $du = \left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$, $t^2 + \frac{1}{t^2} = u^2 + 2$ obţinem,

$$I = 8\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2+2} = \frac{8}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 4\sqrt{2}\pi.$$

410. $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$.

R. Facem substituţia, $\sqrt{1+x+x^2} = t + x$, de unde

$$x = \frac{t^2+1}{1-2t}, \quad dx = -2\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}dt, \quad 1+x = \frac{t(t-2)}{1-2t},$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = -\frac{t^2-t+1}{1-2t}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă

$$I = 2\int_1^{\sqrt{3}-1} \frac{dt}{t(t-2)} = \ln\left|\frac{t}{t-2}\right|\Big|_{\sqrt{3}-1}^{1} = \frac{1}{2}\ln 3$$

411. $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^{\frac{5}{2}}\sqrt{x+1}}$.

R. Este o integrală binomă. Facem substituția

$$1 + x^{-1} = t^2, \quad x = (t^2-1)^{-1}, \quad dx = -2t(t^2-1)^{-2}\,dt$$

de unde,

$$I = -2\int_{\sqrt{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (t^2-1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{2}} = 2\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

412. Să se arate că dacă $f(x)$ este o funcție periodică de perioadă „l" atunci

$$\int_a^{a+l} f(x)\,dx = \int_b^{b+l} f(x)\,dx, \quad \text{pentru orice } a, b \in \mathbf{R}.$$

R. Dacă $f(x)$ este o funcție periodică de perioadă l atunci $f(x+l) = f(x)$. Putem scrie

$$\int_a^{a+l} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b+l} f(x)\,dx + \int_{b+l}^{a+l} f(x)\,dx.$$

Considerăm integrala $\int_{b+l}^{a+l} f(x)\,dx$ și făcînd schimbarea $x = t + l$, $dx = dt$, rezultă

$$\int_{b+l}^{a+l} f(x)\,dx = \int_b^a f(t+l)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt,$$

deci,

$$\int_a^{a+l} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b+l} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^{b+l} f(x)\,dx.$$

413. Să se arate că dacă cele două bobine ale unui instrument electrodinamic sînt străbătute de curenți sinusoidali de intensități eficace I și I' decalați între ei cu un unghi φ, cuplul electrodinamic mediu între cele două bobine este proporțional cu $II'\cos\varphi$.

R. Cuplul instantaneu este $M = ii'$. Valoarea medie

$$M_m = K\frac{1}{T}\int_0^T ii'\,dt = K\frac{2\,II'}{T}\int_0^T \sin\omega t \sin(\omega t + \varphi)\,dt =$$

$$= K\frac{II'}{T}\int_0^T [\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]\,dt = K\frac{II'}{T}\cdot T\cos\varphi = K\,II'\cos\varphi.$$

414. Să se calculeze intensitatea eficace

$$\bar{I} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

a curentului $I(t) = a\sin\omega_1 t + b\cos\omega_2 t$, raportul $\frac{\omega_1}{\omega_2} = r$ fiind un număr rațional dat.

R. Curentul alternativ se compune din doi curenți parțiali cu perioadele $\frac{2\pi}{\omega_1}$ și $\frac{2\pi}{\omega_2}$, μ și λ fiind două numere naturale, cea mai mică perioadă comună T satisface relația

$$T = \lambda\frac{2\pi}{\omega_1} = \mu\frac{2\pi}{\omega_2}$$

din care rezultă $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = r$, $2\omega_1 T = 4\pi\lambda$, $2\omega_2 T = 4\pi\mu$, deci

$$T\bar{I}^2 = \int_0^T I^2(t)\,dt = \frac{1}{2}a^2\int_0^T(1 - 2\cos\omega_1 t)\,dt + ab\int_0^T[\sin(\omega_1+\omega_2)t +$$

$$+ \sin(\omega_1 - \omega_2)t]\,dt + \frac{1}{2}b^2\int_0^T(1 + 2\cos\omega_2 t)\,dt.$$

Integrînd și ținînd seama de valorile lui $\omega_1 T$ și $\omega_2 T$ avem

$$\bar{I}^2 T = \frac{1}{2}T(a^2 + b^2), \text{ de unde } \bar{I} = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}.$$

415. Să se afle lucrul mecanic de deformație la o grindă cu consolă încărcată cu o sarcină uniform distribuită (fig. 28).

R. $M_1 = \frac{px_1^2}{2}$, $M_2 = Ax_2^2 - \frac{px_2^2}{2}$, A fiind reacțiunea în punctul A.

$$L = \int\frac{M^2}{2EI}dx = \int_0^{l_1}\frac{p^2}{2EI}\frac{x_1^4}{4}dx_1 + \frac{1}{2EI}\int_0^l\left(A^2x_2^2 - Apx_2^3 + \frac{p^2}{4}x_2^4\right)dx_2,$$

$$L = \frac{1}{2EI}\left[p^2\frac{l_1^5}{20} + \frac{Al^3}{3} - \frac{Apl^4}{4} + \frac{p^2l^5}{20}\right].$$

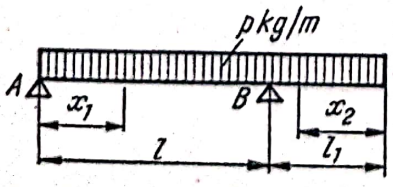

Fig. 28

Avînd în vedere că

$$A = \frac{p}{2l}(l^2 - l_1^2) \text{ rezultă}$$

$$L = \frac{p^2}{120\,EI}[5l_1^5 + 15(l^2 - l_1^2) - 30(l^2 - l_1^2)^3 + 3l^5].$$

Scanned with OKEN Scanner

416. Să se calculeze prin dezvoltări în serie integralele

$$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x}\,dx, \qquad J = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

R. Avem

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \frac{1}{x}\left[x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots\right] = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^6}{5040} + \ldots,$$

Integrînd termen cu termen rezultă

$$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x}\,dx = x + \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} + \frac{x^7}{35\,280} + \ldots \Big|_0^1 =$$

$$= 1 + \frac{1}{18} + \frac{1}{600} + \frac{1}{35\,280} + \ldots = 1{,}057 \text{ (cu trei zecimale exacte).}$$

Pentru integrala a doua avem

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \ldots$$

Integrînd rezultă

$$J = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \ldots = 0{,}946 \text{ (cu trei zecimale exacte).}$$

417. Să se calculeze prin diferite metode aproximative

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

R. Funcția primitivă nu poate fi exprimată cu ajutorul funcțiilor elementare, deci nu putem determina valoarea exactă a integralei.

1. Metoda trapezelor. Împărțim intervalul [0, 1] în zece părți.

Notăm $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}}$ și avem

$x_1 = 0{,}1, \quad y_1 = 1 : \sqrt{1 + 0{,}1^4} = 0{,}99995,$
$x_2 = 0{,}2, \quad y_2 = 1 : \sqrt{1 + 0{,}2^4} = 0{,}99920,$
$x_3 = 0{,}3, \quad y_3 = 1 : \sqrt{1 + 0{,}3^4} = 0{,}99557,$
$x_4 = 0{,}4, \quad y_4 = 1 : \sqrt{1 + 0{,}4^4} = 0{,}98744,$
$x_5 = 0{,}5, \quad y_5 = 1 : \sqrt{1 + 0{,}5^4} = 0{,}97014,$
$x_6 = 0{,}6, \quad y_6 = 1 : \sqrt{1 + 0{,}6^4} = 0{,}94090,$
$x_7 = 0{,}7, \quad y_7 = 1 : \sqrt{1 + 0{,}7^4} = 0{,}89798,$
$x_8 = 0{,}8, \quad y_8 = 1 : \sqrt{1 + 0{,}8^4} = 0{,}84226,$
$x_9 = 0{,}9, \quad y_9 = 1 : \sqrt{1 + 0{,}9^4} = 0{,}77706,$

$$S = \sum_{i=1}^{9} y_i = 8{,}41090$$

$x_{10} = 1, \quad y_{10} = 1 : \sqrt{2} = 0{,}70711.$

Scanned with OKEN Scanner

Formula care ne dă valoarea aproximativă este

$$S = \frac{b-a}{2n}[y_a + y_b + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)].$$

În cazul dat

$$S_1 = \frac{1}{20}(1 + 0{,}77706 + 2{,}841090) = 0{,}92644.$$

Deoarece în intervalul de integrare funcția $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ are concavitatea îndreptată spre ordonatele negative

$$y' = -\frac{2x^3}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}, \quad y'' = -6x^2(1+x^4)^{-\frac{3}{2}} + 12x^6(1+x^4)^{-\frac{5}{2}} < 0,$$

$$0 < x < 1$$

valoarea obținută este prin lipsă.

2. Metoda tangentelor. Pentru aplicarea metodei tangentelor este necesar ca numărul diviziunilor să fie par; în cazul nostru, $2n = 10$.

Formula care dă valoarea aproximativă este

$$S_2 = 2h(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1})$$

deci,

$$S_2 = \frac{1}{5}(0{,}9995 + 0{,}99597 + 0{,}97014 + 0{,}89798 + 0{,}77706) = 0{,}98222.$$

În acest caz metoda tangentelor dă valoarea aproximativă prin exces.

3. Prin dezvoltarea în serie. Pentru $|x| < 1$ avem

$$y = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{1\cdot 3x^8}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{12}}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots$$

Seria fiind uniform convergentă în intervalul [0, 1] poate fi integrată termen cu termen

$$\int_0^1 (1+x^4)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 1 - \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 46\cdot 13} + \ldots$$

Luînd un număr de termeni suficient de mare, putem obține pentru I o valoare apropiată de cea reală (cu o eroare arbitrar de mică).

Să se cerceteze dacă următoarele integrale sînt convergente sau nu.

418. $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3+x^6}}$.

R. Funcția de sub semnul integral este mărginită pe intervalul de integrare și

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = 1, \quad \text{dacă } \alpha = 2,$$

deci integrala este convergentă.

Scanned with OKEN Scanner

419. $I = \int_0^\infty \cos x \, dx.$

R. Prin integrare avem

$$I = \int_0^\infty \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^\infty$$

Dar sin x pentru $x \to \infty$ poate lua orice valoare între -1 și 1 deci integrala este divergentă.

420. $I = \int_0^\infty x \sin x \, dx.$

R. $I = \int_0^\infty x \sin x \, dx = -x \cos x \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \cos x \, dx =$

$$= [-x \cos x + \sin x] \Big|_0^\infty,$$

deci integrala este divergentă (același raționament ca la ex. 419).

421. $I = \int_2^3 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt[5]{(3-x)^2 (x-2)}}.$

R. Funcția de sub semnul integral este nemărginită în punctele $x = 2 + 0$, $x = 3 - 0$.

Într-adevăr

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{(3-x)^2 (x-2)}} = +\infty \quad \text{și}$$

$$\lim_{x \to 3-0} f(x) = \lim_{x \to 3-0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{(3-x)^2 (x-2)}} = +\infty.$$

Dar,

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x^2 (x-2)^\alpha}{\sqrt[5]{(3-x)^2 (x-2)}} = 4, \quad \text{dacă } \alpha = \frac{1}{5} < 1 \quad \text{și}$$

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{x^2 (3-x)^\alpha}{\sqrt[5]{(3-x)^2 (x-2)}} = 9, \quad \text{dacă } \alpha = \frac{2}{5} < 1.$$

Rezultă că integrala este convergentă.

422. $I = \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^4 (x^4 + x^2 + 1)}}.$

R. Limita superioară este infinită și funcția de sub semnul integral este nemărginită în punctul $x = 2$.

Integrala nu are sens deoarece

$$\lim_{x \to 2+0} (2-x)^\alpha f(x) = \lim_{x \to 2+0} \frac{(2-x)^\alpha}{\sqrt[3]{(2-x)^4 (x^4 + x^2 + 1)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{21}},$$

dacă $\alpha = \frac{4}{3} > 1.$

423. $I = \int_0^\infty (e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}})\,dx.$

R. Avem $\lim\limits_{x\to 0+0} (e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} (e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}) = 0,$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha (e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}}{x^{-\alpha}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2a^2}{x^3} e^{-\frac{a^2}{x^2}} - \frac{2b^2}{x^3} e^{-\frac{b^2}{x^2}}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = b^2 - a^2, \quad \text{dacă } \alpha = 2,$$

deci integrala este convergentă.

424. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3}\,dx.$$

R. Funcția de sub semnul integral este mărginită pe $(0, \infty)$. Calculul se face pornind de la definiție.

$$I = \int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3}\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^A \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3}\,dx.$$

Folosim metoda de integrare prin părți și aflăm o primitivă a funcției de sub semnul integral.

$$u = \ln x, \quad \frac{x\,dx}{(1+x^2)^3} = dv, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(1+x^2)^2},$$

deci

$$F(x) = \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3}\,dx = -\frac{1}{4}\,\frac{\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2},$$

dar

$$\frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2}, \quad \text{de unde}$$

$$F(x) = -\frac{1}{4}\,\frac{\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln(1+x^2) + \frac{1}{8}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\int_0^A \frac{x \ln x\,dx}{(1+x^2)^3} = F(A) - F(0).$$

$$F(0) = \lim_{x\to 0+0} F(x) = \frac{1}{8} \quad \text{și}$$

$$\lim_{A\to\infty} F(A) = \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{1}{4}\,\frac{\ln A}{(1+A^2)^2} + \frac{1}{8}\ln\frac{A^2}{1+A^2} + \frac{1}{8}\,\frac{1}{1+A^2} \right] = 0$$

deci, $I = -\frac{1}{8}$.

Scanned with OKEN Scanner

425. Să se calculeze

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx.$$

R. Integrala este improprie, deoarece $\lim\limits_{x\to 0+} \ln(\sin x) = -\infty$, dar este convergentă,

$$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha}\ln(\sin x) = 0, \quad \text{pentru} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Facem $x = 2u$ şi avem,

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2u\, du = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln(\sin u) + \ln(\cos u))\, du =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin u)\, du + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos u)\, du.$$

În ultima integrală facem $u = \frac{\pi}{2} - z$ şi obţinem

$$I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin u) + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin z)\, dz = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin u)\, du,$$

deci, $I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I$, de unde $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

426. Să se calculeze integrala

$$I = \int_a^b \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}, \quad a < b.$$

R. Integrala este improprie deoarece $\lim\limits_{x\to a+} \frac{x^2}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to b-} \frac{x^2}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = +\infty$, dar este convergentă deoarece

$$\lim_{x\to a+} \frac{(x-a)^{\alpha} x^2}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{a^2}{\sqrt{b-a}}, \quad \text{dacă} \quad \alpha = \frac{1}{2} < 1;$$

$$\lim_{x\to b-} \frac{(b-x)^{\alpha} x^2}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{b^2}{\sqrt{b-a}} \quad \text{dacă} \quad \alpha = \frac{1}{2} < 1.$$

Pentru calcul facem schimbarea de variabilă,

$$x = a\cos^2 t + b\sin^2 t, \quad dx = 2(b-a)\sin t\cos t\, dt,$$

$$(x-a)(b-x) = (b-a)\sin t\cos t, \quad \text{de unde}$$

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos^2 t + b\sin^2 t)^2\, dt = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + ab).$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XI

SERII DE PUTERI. SERII FOURIER

Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii,

427. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$.

R. Aflăm raza de convergență

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3(3n+1)(3n+2)}{(n+1)^2} = 27.$$

Pentru $x = 27$ obținem seria numerică

$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{3n} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$, care este divergentă, căci (criteriul lui Raabe)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2} - 1\right) = -1 < 1.$$

Pentru $x = -27$, este de asemenea divergentă.
Seria este convergentă pentru $x \in (-27,27)$.

428. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4n-3)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \ldots (4n-1)} x^n$.

R. Raza de convergență este

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{4n+1} = 1$$

Pentru $x = -1$, obținem seria

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4n-3)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \ldots (4n-1)}$, care este divergentă (criteriul lui Raabe), căci,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n+3}{4n+1} - 1\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x = 1$, obținem seria alternantă

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \ldots (4n-3)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \ldots (4n-1)},$$

care satisface criteriul lui Leibniz, deci convergentă.

Așadar mulțimea de convergență este $(-1, 1]$.

429. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^p$

R. Raza de convergență este,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^p = 2^p$$

Dacă $x = -2^p$, seria devine

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p 2^{np}$$

Aplicăm criteriul lui Raabe, luînd $u_n = \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p \cdot 2^{np}$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(2n+3)^p}{2^p (n+1)} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{n}\right)^p - 2^p \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}{2^p \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \cdot \frac{1}{n}}$$

Pentru a calcula această limită, calculăm,

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{(2+3x)^p - 2^p (1+x)}{2^p x (1+x)^p}$$

Aplicăm regula lui l'Hospital $\left(\text{cazul } \frac{0}{0}\right)$ și avem

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{(2+3x)^p - 2^p (1+x)}{2^p x (1+x)^p} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{3p(2+x)^{p-1} - 2^p p (1+x)^{p-1}}{2^p (1+x)^p + 2^p x p (1+x)^{p-1}} = \frac{p}{2}, \text{ de unde}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{p}{2}.$$

Deci seria este convergentă pentru $p > 2$, și divergentă pentru $p < 2$.

Dacă $x = 2^p$, obținem seria numerică,

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p 2^{np}$, absolut convergentă pentru $p > 2$ (se face la fel)

și simplu convergentă pentru $0 < p \leqslant 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii:

430. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$, $x \neq -1$.

R. Facem $\frac{1-x}{1+x} = y$ și obținem seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} y^n$$

Raza de convergență este, $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$. Dacă $y = 1$, obținem seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$, care este divergentă. Dacă $y = -1$, obținem seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$, care este convergentă (criteriul lui Leibniz).

Deci mulțimea de convergență a seriei inițiale este dată de,

$$-1 \leqslant \frac{1-x}{1+x} < 1, \qquad x \neq -1, \quad \text{sau} \quad x \geqslant 0.$$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+1}\left(\frac{1}{x-3}\right)^n$, $x \neq 3$.

R. Facem $y = \frac{1}{x+3}$ obținem seria,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+1} y^n$$

Raza de convergență este:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n^2+2n+2)}{(n^2+1)(n+4)} = 1.$$

Dacă $y = 1$, obținem seria numerică, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+1}$, divergentă. Dacă $y = -1$, obținem seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2+1}$, care este convergentă.

Mulțimea de convergență va fi dată de,

$$-1 \leqslant \frac{1}{x-3} < 1, \quad x \neq 3, \quad \text{sau} \quad x \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty).$$

431. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctului $x = a$ funcția

$$f(x) = \sin^3 x, \qquad x \in R.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Avem $f(x) = \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$,

$$f'(x) = \frac{1}{4}(3\cos x - 3\cos 3x) = \frac{1}{4}\left[3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - 3\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left[3\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - 3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

deci

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}\left(3\sin a - \sin 3a\right) + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\sin\left(a+n\frac{\pi}{2}\right) - 3^{n-1}\sin\left(3a+n\frac{\pi}{2}\right)\right](x-a)^n}{n!}$$

Dacă $a = 0$, obținem seria

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-3^{2n})}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

432. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctului $x = 1$, funcția

$$f(x) = \ln(5 - 2x + x^2), \quad x \in \mathbf{R}.$$

R. $f(x) = \ln[4 + (x-1)^2] = 2\ln 2 + \ln\left[1 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right]$.

Se folosește dezvoltarea

$$\ln(1+y) = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{y^n}{n} + \ldots, \quad |y| < 1.$$

Avem

$$\ln(5 - 2x + x^2) = 2\ln 2 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n} \ldots,$$

$$\text{pentru } \left|\frac{x-1}{2}\right| < 1, \quad -1 < x < 3.$$

Pentru $x = -1$, obținem seria numerică,

$$2\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}, \text{ care este convergentă (Leibniz).}$$

Pentru $x = 3$, obținem seria numerică

$$2\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}, \text{ convergentă (Leibniz).}$$

433. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x, funcția

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad x \in \mathbf{R}.$$

R. Derivăm funcția dată, avem

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosim seria binomului generalizat

$$(1+x)^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1!}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad |x| < 1,$$

luînd $\alpha = -\frac{1}{2}$ și înlocuind x cu x^2, obținem

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2\cdot 1!}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}x^4 + \ldots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Pentru $x = \pm 1$, obținem o serie convergentă.

Integrăm termen cu termen în intervalul $[-1, 1]$ și obținem,

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1} + C.$$

Dacă $x = 0$, obținem $C = 0$.

Rezultă,

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}, \quad |x| \leqslant 1.$$

434. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcția,

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}, \quad x \neq \pm\sqrt{2}.$$

R. $f'(x) = \frac{4+2x^2}{4+x^4} = \frac{1}{1+\frac{x^4}{4}} + \frac{x^2}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^4}{4}}\cdot$

Folosim dezvoltarea binomială

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + \ldots + (-1)^n y^n + \ldots, \quad |y| < 1.$$

Rezultă

$$f'(x) = 1 - \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^8}{2^4} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{2n}} + \ldots + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^8}{2^4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{2n}} + \ldots\right)$$

pentru $x^4 < 4$, sau $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$,

sau

$$f'(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2^2} - \frac{x^6}{2^3} + \frac{x^8}{2^4} + \ldots + (-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{x^{2n}}{2^n} + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

În intervalul $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ seria este uniform convergentă, deci poate fi integrată termen cu termen. Obținem

$$\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2} = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} - \frac{x^5}{2^2\cdot 5} + \ldots + (-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}\, x^{2n+1} + \ldots,$$

sau;

$$\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}, \quad |x| < \sqrt{2}.$$

435. Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția,

$$f(x) = \ln \sqrt[7]{(1-4x+3x^2)^{x^2}}.$$

R. Putem scrie

$$f(x) = \frac{x^2}{7} \ln (1-3x)(1-x) = \frac{x^2}{7}[\ln (1-3x) + \ln (1-x)].$$

Folosim dezvoltarea

$$\ln (1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \ldots - \frac{y^n}{n} + \ldots, \quad \text{dacă} \quad |y| < 1$$

și obținem

$$\ln \sqrt[7]{(1-4x+3x^2)^{x^2}} = -\frac{x^2}{7}\left(\frac{3x}{1} + \frac{3^2x^2}{2} + \ldots + \frac{3^nx^n}{n} + \ldots\right)$$

$$-\frac{x^2}{7}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right) = -\frac{1}{7}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{n} x^{n+2}$$

Raza de convergență este

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3^n}{n} \cdot \frac{n+1}{1+3^{n+1}} = \frac{1}{3}$$

Pentru $x = \frac{1}{3}$, obținem seria de termen general

$u_n = -\frac{1}{7}\frac{1+3^n}{n}\cdot\frac{1}{3^{n+2}}$. Fie seria de termen general $v_n = \frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = -\frac{1}{63}$,

deci și seria de termen general u_n este divergentă.

Pentru $x = -\frac{1}{3}$, obținem seria de termen general

$w_n = (-1)^{n+2}\frac{1}{7}\cdot\frac{1+3^n}{n}\frac{1}{3^{n+2}}$, care este convergentă, satisfăcînd criteriul lui Leibniz, dar nu este absolut convergentă.

Intervalul de convergență este $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

436. Să se găsească dezvoltarea în serie Mac-Laurin a funcției $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$

R. Dezvoltăm în serie funcțiile:

$$g(x) = \operatorname{arctg} x \quad \text{și} \quad h(x) = \ln\sqrt{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

În intervalul $(-1, 1)$ seria este uniform convergentă, deci putem integra termen cu termen și obținem,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad |x| \leqslant 1,$$

$$\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n} + \ldots\right)$$

dacă $|x| \leqslant 1$. (Seria este convergentă și pentru $x = \pm 1$.)
De unde,

$$x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}, \quad |x| \leqslant 1.$$

437. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x, funcția

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x+x^2}, \quad |x| < 1.$$

R. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x^3} = (1-x^2)(1-x^3)^{-1}.$

Aplicăm seria binomului generalizată

$$f(x) = (1-x^2)(1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{3n} + \ldots),$$

$$f(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + x^9 + \ldots + x^{3n} - x^{3n+2} + \ldots$$

438. Să se determine a și b, astfel încît

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x + a \sin 2x + b \sin x}{x^5},$$

să fie finită și să se afle această limită.

R. Notăm $f(x) = \sin 3x + a \sin 2x + b \sin x$. Dezvoltînd $f(x)$ în serie de puteri avem,

$$f(x) = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \ldots + a\left[2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \ldots\right] +$$

$$+ b\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right],$$

$$f(x) = (3 + 2a + b)\,x - (27 + 8a + b)\frac{x^3}{3!} + (3^5 + 2^5 a + b)\frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}$ să fie finită, trebuie ca

$$3+2a+b=0, \qquad 27+8a+b=0, \qquad \text{de unde}$$

$$a=-4, \qquad b=5.$$

Rezultă, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\frac{3^5-4\cdot 2^5+5}{5!}=1.$

439. Să se dezvolte în serie Fourier funcția periodică $f(t)$, de perioadă π, definită pe intervalul $(0, \pi)$, prin

$$f(t)=e^{-at}.$$

R. Notînd perioada cu T și pulsația cu ω, avem:

$$T=\pi, \quad \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2.$$

Seria Fourier a funcției $f(t)$ este de forma

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 2kt+b_k\sin 2kt),$$

coeficienții a_0, a_k, b_k fiind dați de formulele

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^{\pi}f(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-at}\,dt=\frac{1}{a\pi}(1-e^{-a\pi}),$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^{\pi}f(t)\cos k\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-at}\cos 2kt\,dt \quad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^{\pi}f(t)\sin k\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-at}\sin 2kt\,dt$$

Integralele care dau coeficienții a_k, b_k pot fi calculate împreună. Avem:

$$a_k-ib_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-(a+2ki)t}\cdot dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{a+2ki}[1-e^{-(a+2ki)}], \quad (i=\sqrt{-1}),$$

$$a_k-ib_k=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{a-2ki}{a^2+4k^2}(1-e^{-a\pi})$$

de unde rezultă

$$a_k=\frac{2a(1-e^{-a\pi})}{\pi(a^2+4k^2)}, \qquad b_k=\frac{4k(1-e^{-a\pi})}{\pi(a^2+4k^2)}$$

Dezvoltarea cerută este

$$f(t)=\frac{1-e^{-a\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{a}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\cos 2kt+2k\sin 2kt}{a^2+4k^2}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

440. Să se reprezinte printr-o serie Fourier funcția $f(t)$, periodică, de perioadă 2π, definită prin

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } t \in (0, \pi) \\ -1, & \text{pentru } t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

R. Avem

$$T = 2\pi, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Seria Fourier a funcției $f(t)$ este

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Coeficienții a_0, a_k, b_k sînt dați de formulele

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-1)\,dt = \frac{1}{2\pi}(\pi - 2\pi + \pi) = 0,\right.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos kt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-1)\cos kt\,dt\right] = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin kt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-1)\sin kt\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}(1 - \cos k\pi) + \frac{1}{k}(\cos 2k\pi - \cos k\pi)\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^k}{k}$$

Deci, n fiind un număr natural, avem:

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{pentru } k = 2n \\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2n-1}, & \text{pentru } k = 2n-1 \end{cases}$$

Seria Fourier a funcției $f(t)$ este

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \ldots\right)$$

Conform teoremei lui Dirichlet, această serie este convergentă pentru toate valorile lui t și suma sa este egală cu $f(t)$ pentru orice $t \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

În punctele $t = k\pi$ funcția $f(t)$ nu a fost definită. Dacă vom lua $f(0) = f(\pi) = 0$, datorită periodicității avem $f(k\pi) = 0$, pentru orice k întreg și suma seriei va fi egală cu $f(t)$ și în punctele de discontinuitate. Deci, pentru orice t, avem

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3t} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} + \ldots\right)$$

441. Să se dezvolte în serie Fourier funcția periodică $F(t)$, de perioadă 2π, definită pe intervalul $[0, 2\pi)$ prin

$$F(t) = \begin{cases} t, & \text{pentru } t \in [0, \pi] \\ 2\pi - t, & \text{pentru } t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Observăm că pentru $t \neq k\pi$, $k \in Z$, avem

$$F'(t) = f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)\, t}{2n-1}$$

unde $f(t)$ este funcţia din exemplul precedent.

Integrînd seria corespunzătoare lui $f(t)$, termen cu termen, fie în intervalul $(0, \pi)$, fie în intervalul $(\pi, 2\pi)$, obţinem

$$F(t) = C - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)\, t}{(2n-1)^2}$$

Deoarece avem

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \qquad \cos (2n-1)\, \frac{\pi}{2} = 0$$

rezultă că

$$C = \frac{\pi}{2}$$

Rezultă astfel seria Fourier

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)\, t}{(2n-1)^2}$$

442. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică $f(t)$, de perioadă 2π, definită în intervalul $(-\pi, \pi)$ prin

$$f(t) = \begin{cases} at, & \text{pentru } t \in (-\pi, 0) \\ bt, & \text{pentru } t \in [\ 0, \pi) \end{cases}$$

R. Avem

$$T = 2\pi, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

Seria Fourier a funcţiei date este

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

unde coeficienţii a_0, a_k, b_k sînt daţi de formulele

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} at\, dt + \int_{0}^{\pi} bt\, dt \right) = \frac{\pi}{4} (b - a)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} at \cos kt\, dt + \int_{0}^{\pi} bt \cos kt\, dt \right)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} at \sin kt\, dt + \int_{0}^{\pi} bt \sin kt\, dt \right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculînd prin părţi următoarele două integrale, obţinem

$$\int t\cos kt\,dt = \frac{1}{k}t\sin kt + \frac{1}{k^2}\cos kt + C_1$$

$$\int t\sin kt\,dt = -\frac{1}{k}t\cos kt + \frac{1}{k^2}\sin kt + C_2$$

unde C_1, C_2 sînt constante de integrare. Avem apoi

$$\int_{-\pi}^{0} t\cos kt\,dt = \frac{1}{k^2}[1-(-1)^k], \quad \int_{0}^{\pi} t\cos kt\,dt = -\frac{1}{k^2}[1-(-1)^k]$$

$$\int_{-\pi}^{0} t\sin kt\,dt = -\pi\cdot\frac{(-1)^k}{k}, \quad \int_{0}^{\pi} t\sin kt\,dt = -\pi\cdot\frac{(-1)^k}{k},$$

$$a_k = \frac{a-b}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^k}{k^2}, \qquad b_k = (a+b)\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Se observă că avem

$$a_{2n-1} = \frac{2(a-b)}{\pi}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}, \qquad a_{2n} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Seria Fourier a funcţiei $f(t)$ este prin urmare

$$f(t) = -\frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} + (a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nt}{n}.$$

Observaţii. 1°). Din această dezvoltare putem calcula suma seriei numerice

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$$

care este convergentă. Într-adevăr, funcţia $f(t)$ este continuă în punctul $t = 0$ şi atunci, conform teoremei lui Dirichlet, suma seriei Fourier în punctul $t = 0$ este egală cu $f(0)$. Avem astfel

$$0 = f(0) = -\frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

de unde rezultă

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2°) Suma seriei Fourier la capetele intervalului $(-\pi, \pi)$, adică în punctele $t = -\pi$, $t = \pi$ este

$$S(\pm\pi) = \frac{b-a}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi}{(2n-1)^2} = \frac{b-a}{4}\pi -$$

$$-\frac{2(a-b)}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{b-a}{4}\pi + \frac{2(b-a)}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{b-a}{2}\pi.$$

Scanned with OKEN Scanner

443. Să se reprezinte printr-o serie Fourier funcția

$$f(t) = |\sin t|, \quad t \in [0, \pi]$$

R. Funcția $f(t)$ este pară și are perioada $T = \pi$, deci $\omega = 2$. Condițiile lui Dirichlet sînt satisfăcute și $f(t)$ este continuă pentru toate valorile lui t. Seria Fourier a funcției $f(t)$ este convergentă și are suma egală cu $f(t)$ pentru orice t.

Seria Fourier a funcției date este de forma

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2kt$$

unde coeficienții a_0, a_k sînt dați de formulele

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = \frac{2}{\pi}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega t = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos 2kt\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(1+2k)t + \sin(1-2k)t]\,dt = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(1+2k)t}{1+2k} + \frac{\cos(1-2k)t}{1-2k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

Seria Fourier a funcției $f(t)$ este deci

$$|\sin t| = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{1\cdot 3} - \frac{\cos 4t}{3\cdot 5} - \frac{\cos 6t}{5\cdot 7} - \ldots\right)$$

Observație. Din această dezvoltare se poate deduce suma seriei numerice

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots$$

care este convergentă.

Într-adevăr, dacă facem $t = 0$ în dezvoltarea de mai sus obținem

$$0 = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7} - \ldots\right)$$

de unde rezultă

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots = \frac{1}{2}$$

444. Să se dezvolte în serie Fourier funcția periodică de perioadă $T = 2a$, definită pe intervalul $(-a, a)$ prin $f(t) = t$.

R. Funcția dată satisface condițiile lui Dirichlet și este o funcție impară avînd $\omega = \frac{\pi}{a}$. Seria sa Fourier este de forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\,\frac{\pi}{a}\,t$$

Scanned with OKEN Scanner

coeficienţii b_k fiind daţi de formulele

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega t\,dt = \frac{2}{a}\int_0^a t\sin k\frac{\pi}{a}t\,dt =$$

$$= \frac{2}{a}\left[-\frac{a}{k\pi}t\cos k\frac{\pi}{a}t\right]_0^a + \frac{2}{a}\cdot\frac{a}{k\pi}\int_0^a \cos k\frac{\pi}{a}t\,dt = \frac{2a}{k\pi}(-1)^{k+1}$$

Seria Fourier a funcţiei date este prin urmare

$$f(t) = \frac{2a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k}\sin k\frac{\pi}{a}t$$

445. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică $f(t)$, de perioadă 2π, definită pe intervalul $[-\pi, \pi]$ prin

$$f(t) = \begin{cases} 0\ , & t\in\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ t+\frac{\pi}{2}, & t\in\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ -t+\frac{\pi}{2}, & t\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

R. Funcţia $f(t)$ este pară şi avem

$$T = 2\pi, \quad \omega = 1.$$

Seria Fourier este de forma

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kt$$

coeficienţii a_0, a_k fiind daţi de

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0.dt =\right] = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-t+\frac{\pi}{2}\right)\cos kt\,dt +\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0.\cos kt\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\cos k\frac{\pi}{2}}{k^2}\right.$$

Seria Fourier a funcţiei date este

$$f(t) = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{2\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \frac{2\cos 6t}{6^2} + \ldots\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

446. Să se determine seria Fourier a funcției periodice $f(t)$, de perioadă 2π, definită pe intervalul $[-\pi, \pi]$ prin

$$f(t)=\begin{cases}-t-\pi, & t\in\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]\\ t, & t\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\\ -t+\pi, & t\in\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\end{cases}$$

R. Funcția dată este impară. Condițiile lui Dirichlet sînt satisfăcute. Avem

$$T=2\pi, \quad \omega=1.$$

Seria Fourier este de forma

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt$$

coeficienții b_k fiind dați de

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\,dt=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin kt\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-t+\pi)\sin kt\,dt\right].$$

Avem apoi

$$\int t\sin kt\,dt=-\frac{1}{k}t\cos kt+\frac{1}{k^2}\sin kt+C$$

de unde rezultă

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin kt\,dt=-\frac{\pi}{2k}\cos k\frac{\pi}{2}+\frac{1}{k^2}\sin k\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\sin kt\,dt=-\frac{\pi}{k}\cos k\pi+\frac{\pi}{2k}\cos k\frac{\pi}{2}-\frac{1}{k^2}\sin k\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin kt\,dt=-\frac{1}{k}\cos kt\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{1}{k}\cos k\pi+\frac{1}{k}\cos k\frac{\pi}{2}.$$

Deducem astfel că avem

$$b_k=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{k^2} \quad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

Dînd lui k valorile 1, 2, 3, ..., obținem

$$b_1=\frac{4}{\pi}, \quad b_2=0, \quad b_3=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3^2}, \quad b_4=0, \quad b_5=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5^2}, \quad b_6=0, \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama că

$$\sin k\frac{\pi}{2} = \sin (k+4)\frac{\pi}{2}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

rezultă că seria Fourier a funcţiei date este:

$$f(t) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sin t}{1^2} - \frac{\sin 3t}{3^2} + \frac{\sin 5t}{5^2} - \frac{\sin 7t}{7^2} + \ldots\right)$$

447. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(t) = \left|\sin\frac{t}{2}\right|$$

R. Funcţia este pară şi are perioada $T = 2\pi$, deci $\omega = 1$. Seria sa Fourier este de forma

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt.$$

Coeficienţii a_0, a_k sînt daţi de formulele

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{2}{\pi},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\cos t dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{2k+1}{2}t - \sin\frac{2k-1}{2}t\right)dt = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{2k+1}\cos\frac{2k+1}{2}t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2k-1}\cos\frac{2k-1}{2}t\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{1-4k^2}$$

Dezvoltarea Fourier a funcţiei date este deci

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 4kt}{1-4k^2}\right).$$

448. Să se calculeze sumele seriilor trigonometrice

$$S_1(x) = 1 + \frac{1}{a}\cos x + \frac{1}{a^2}\cos 2x + \ldots + \frac{1}{a^n}\cos nx + \ldots \quad (a > 1)$$

$$S_2(x) = \frac{1}{a}\sin x + \frac{1}{a^2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{a^n}\sin nx + \ldots$$

R. Seriile date sînt (absolut) convergente pentru $x \in \mathbf{R}$, deoarece

$$\left|\frac{\cos nx}{a^n}\right| \leqslant \frac{1}{a^n}, \quad \left|\frac{\sin nx}{a^n}\right| \leqslant \frac{1}{a^n} \quad (n \in \mathbf{N}, \quad x \in \mathbf{R})$$

iar seria numerică de termen general $\frac{1}{a^n}$ este convergentă pentru $a > 1$, fiind seria geometrică de raţie $0 < \frac{1}{a} < 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem succesiv

$$S_1(x) + iS_2(x) = 1 + \frac{1}{a}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{a^2}(\cos 2x + i \sin 2x) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{a^n}(\cos nx + i \sin nx) + \ldots = 1 + \frac{1}{a}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{a^2}(\cos x + i \sin x)^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{a^n}(\cos x + i \sin x)^n + \ldots$$

Notînd

$$z = \cos x + i \sin x, \quad \left(|z| = 1, \quad \left|\frac{z}{a}\right| = \frac{1}{a} < 1\right)$$

obținem

$$S_1(x) + iS_2(x) = 1 + \frac{z}{a} + \left(\frac{z}{a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z}{a}\right)^n + \ldots =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{z}{a} + \left(\frac{z}{a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z}{a}\right)^n\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{z}{a}\right)^{n+1} - 1}{\frac{z}{a} - 1} =$$

$$= \frac{a}{a - z} = \frac{a}{a - \cos x - i \sin x} = \frac{a(a - \cos x + i \sin x)}{a^2 - 2a \cos x + 1}$$

Prin identificare, rezultă

$$S_1(x) = \frac{a(a - \cos x)}{a^2 - 2a \cos x + 1}, \qquad S_2(x) = \frac{a \sin x}{a^2 - 2a \cos x + 1}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XII

INTEGRALE CURBILINII

449. Să se calculeze integrala

$$I = \int_C x^2 \, ds,$$

unde C este arcul de cerc definit prin intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, cu planul $y = x$, parcurs de la punctul $A(0, 0, -a)$ la punctul $B(0, 0, a)$ (fig. 29).

R. O reprezentare parametrică a arcului de cerc C este

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \sin\theta, \\ y = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \sin\theta, \quad \theta \in [0, \pi]; \\ z = a\cos\theta \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = a\,d\theta.$$

Rezultă

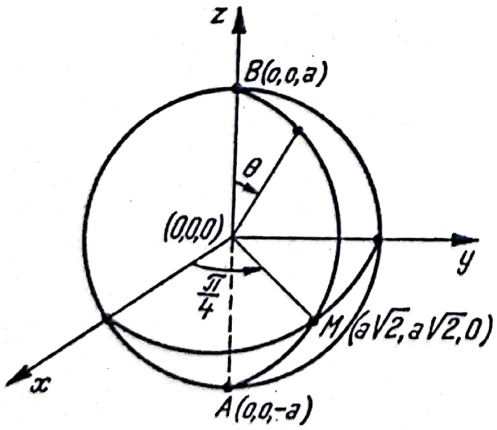

Fig. 29

$$I = \int_0^{\pi} \frac{a^3}{2} \sin^2\theta \, d\theta = \frac{a^3}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta =$$

$$= \frac{a^3}{4}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{a^3}{4}\pi.$$

450. Să se calculeze integrala

$$I = \int_C xy \, ds$$

unde C este curba de intersecție a suprafețelor: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4}$, situată în primul octant (fig. 30).

R. O reprezentare parametrică a curbei C este:

$$x = \frac{a}{2}\cos\theta, \quad y = \frac{a}{2}\sin\theta, \quad z = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{a}{2}\,d\theta.$$

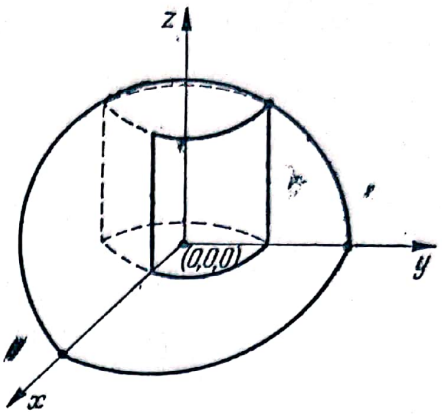

Fig. 30

Rezultă

$$I = \frac{a^3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{a^3}{16}.$$

451. $I = \int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\,ds,$

unde C este astroida: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (fig. 31).

R. Avem $x = a\sin^3\theta, \quad y = a\cos^3\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 3a\,|\sin\theta\cos\theta|\,d\theta.$$

$$I = 3a^{\frac{7}{3}}\int_0^{2\pi} (\sin^4\theta + \cos^4\theta\,|\sin\theta\cos\theta|\,d\theta =$$

$$= 3a^{\frac{7}{3}}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^4\theta + \cos^4\theta)\,|\sin\theta\cos\theta|\,d\theta,$$

deoarece integrantul este o funcție periodică. Integrantul fiind funcție pară, rezultă

$$I = 6a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\pi} (\sin^4\theta + \cos^4\theta)\,|\sin\theta\cos\theta|\,d\theta = 4a^{\frac{7}{3}}.$$

452. Să se calculeze

$I = \int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, unde C este arcul de parabolă $y^2 = x$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, (fig. 32).

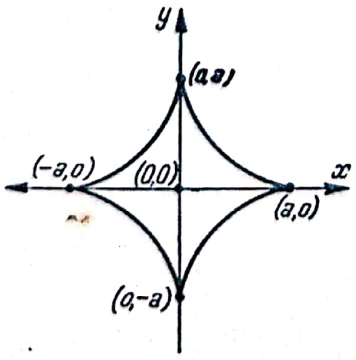

Fig. 31

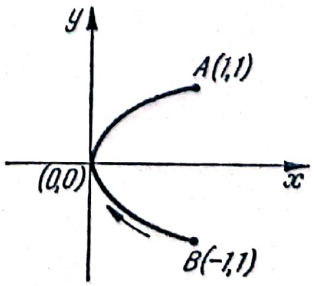

Fig. 32

R. O reprezentare parametrică a curbei C este

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, \ 1],$$

$$I = \int_{-1}^{1} [2t(t^4 - 2t^3) + (t^2 - 2t^3)] \, dt = -\frac{4}{3}$$

5. Să se calculeze integrala

$$I = \int_C (x - y) \, dx - (x + y) \, dy, \quad \text{unde } C \text{ este elipsa}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

R. O reprezentare parametrică a elipsei este:

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad \theta \in [0, \ 2\pi).$$

$$I = \int_0^{2\pi} [-(b \sin \theta - a \cos \theta) \, a \sin \theta - (a \cos \theta + b \sin \theta) \, b \cos \theta] \, d\theta = 0.$$

453. $I = \oint_{C \, |x| + |y|} \frac{dx + dy}{}$, unde C este conturul patratului de vîrfuri $A(2,0)$, $B(0, 2)$, $C(-2, 0)$, $D(0, -2)$ parcurs în sens trigonometric (fig. 33).

R. $I = \int_{AB} \frac{dx + dy}{x + y} + \int_{BC} \frac{dx + dy}{-x + y} + \int_{CD} \frac{dx + dy}{-x - y} + \int_{DA} \frac{dx + dy}{x - y}.$

Ecuațiile parametrice ale celor patru segmente sînt:

AB : $x = t, \quad y = 2 - t, \quad t \in [0, \ 2]$ și

$$\int_{AB} \frac{dx + dy}{x + y} = 0,$$

BC : $x = t, \quad y = 2 + t, \quad t \in [-2, 0]$ și

$$\int_{BC} \frac{dx + dy}{-x + y} = -2 \int_{-2}^{0} \frac{dt}{2} = -2,$$

CD : $x = t, \quad y = -2 - t, \quad t \in [-2, \ 0]$, deci

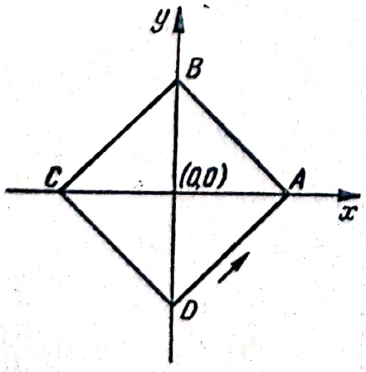

Fig. 33

$$\int_{CD} \frac{dx + dy}{-x - y} = 0,$$

DA : $x = t, \quad y = t - 2, \quad t \in [0, 2]$, deci

$$\int_{DA} \frac{dx + dy}{x - y} = 2 \int_0^2 \frac{dt}{2} = 2$$

De unde,

$$I = \int_C \frac{dx + dy}{x + y} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

454. $I = \int_C \frac{2\,dx - dy}{x + y + 6}$, unde C este semicercul $x^2 + y^2 = 4$, $y \geqslant 0$, parcurs în sens direct.

R. O reprezentare parametrică a semicercului este:

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

Avem

$$I = -\int_0^{\pi} \frac{2(\sin t + \cos t)\,dt}{\sin t + \cos t + 3}.$$

Facem substituția $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ și obținem

$$I = -2\int_0^{\infty} \frac{1 + 4u - u^2}{(1 + u^2)(2u^2 + 2u + 3)}\,du,$$

sau

$$I = -2\int_0^{\infty} \frac{2}{1 + u^2}\,du + \int_0^{\infty} \frac{5\,du}{2u^2 + 2u + 3} = -4 \operatorname{arctg} u\Big|_0^{\infty} +$$

$$+ \frac{5}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2u + 1}{\sqrt{5}}\Big|_0^{\infty} = -2\pi + \frac{5\pi}{2\sqrt{5}} - \frac{5}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

455. $I = \int_C \frac{dy}{y\sqrt{x + y + 1}}$, unde C este curba definită de $x = t^2$, $y = t$, $t \in [1, \infty]$.

R. Avem

$$I = \int_C \frac{dy}{y\sqrt{1 + x + y}} = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1 + t + t^2}}.$$

Facem substituția $\sqrt{t^2 + t + 1} = t + u$, $t = \frac{u^2 - 1}{1 - 2u}$, și obținem

$$I = 2\int_{\sqrt{3}-1}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2 - 1} = \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right|_{\sqrt{3}-1}^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}.$$

456. $I = \int_C \frac{dx + dy}{x + y + 4}$, unde C este conturul elipsei

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0, \quad \text{parcurs în sens direct.}$$

R. O reprezentare parametrică a elipsei este dată de $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$. Rezultă

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(-2\sin t + 3\cos t)\,dt}{2\cos t + 3\sin t + 4} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3\cos t - 2\sin t}{2\cos t + 3\sin t + 4}\,dt$$

deoarece integrantul este o funcție periodică de perioadă 2π.

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd schimbarea, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, obținem

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3-4t-t^2}{(1+t^2)(t^2+5t+3)}\,dt$$

Descompunem integrantul în elemente simple;

$$\frac{3-4t-t^2}{(1+t^2)(t^2+3t+3)}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{Ct+D}{t^2+3t+3}.$$

Făcînd calculele obținem $A=-\frac{4}{13}$, $B=-\frac{20}{13}$, $C=\frac{4}{13}$, $D=\frac{99}{13}$, de unde

$$I=-\frac{4}{13}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t+5}{1+t^2}\,dt+\frac{1}{13}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4t+99}{t^2+3t+3}\,dt=\frac{2}{13}\ln\frac{t^2+3t+3}{1+t^2}=$$

$$=\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{20}{13}\operatorname{arctg}t\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{186}{13\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+3}{\sqrt{3}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\left(\frac{186}{13\sqrt{3}}-\frac{20}{13}\right)\pi=$$

$$=\frac{186}{13\sqrt{3}}(186-20\sqrt{3})\,\pi.$$

457. Să se calculeze

$I=\int_C x^2\,dx+xy\,dy-yz\,dz$, unde C este curba de intersecție a conului $y^2+z^2=(1-x)^2$ cu planele de coordonate situate în primul octant (fig. 34).

R. $$I=\int_{AB}x^2\,dx+xy\,dy-yz\,dz+\int_{BC}x^2\,dx+xy\,dz-yz\,dz+$$

$$+\int_{CA}x^2\,dx+xy\,dy-yz\,dz.$$

Avem:

AB: $x=t$, $y=1-t$, $z=0$, $t\in[0,\ 1]$, deci

$$\int_{AB}x^2\,dx+xy\,dy-yz\,dz=$$

$$\int_1^0[t^2-t(1-t)]\,dt=-\frac{1}{6},$$

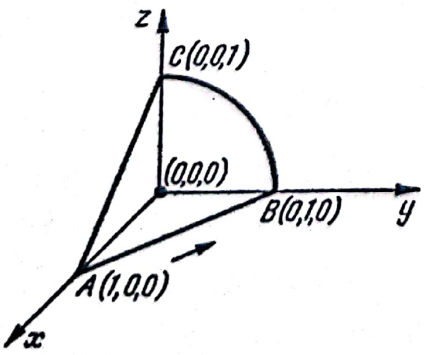

Fig. 34

BC: $x=0$, $y=\cos t$, $z=\sin t$, $t\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$, deci

$$\int_{BC}x^2\,dx+xy\,dy-yz\,dz=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\,dt=-\frac{1}{3},$$

Scanned with OKEN Scanner

CA: $x = t$, $y = 0$, $z = 1 - t$, $t \in [0, 1]$, deci

$$\int_{CA} x^2\,dx + xy\,dy - yz\,dz = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}.$$

Făcînd suma celor trei integrale, rezultă $I = -\frac{1}{6}$.

458. Să se calculeze

$I = \int_C (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, unde C este curba de intersecție a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, cu planele de coordonate situate în primul octant (fig. 35).

R. Descompunem integrala într-o sumă de trei integrale pe arcele de cerc AB, BC, CA.

Pentru arcul AB avem: $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = 0$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de unde

$$\int_{AB} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\theta + \cos^3\theta)\,d\theta =$$

$$= -\frac{4}{3}.$$

În mod analog se obține:

$$\int_{BC} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz = -\frac{4}{3},$$

$$\int_{CA} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz = -\frac{3}{4}, \text{ de unde } I = -4.$$

459. Să se arate că integrala

$$I = \int_{AB} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

este independentă de drum și să se calculeze integrala pe o curbă ce unește punctele $A(1, \pi)$, $B(2, \pi)$.

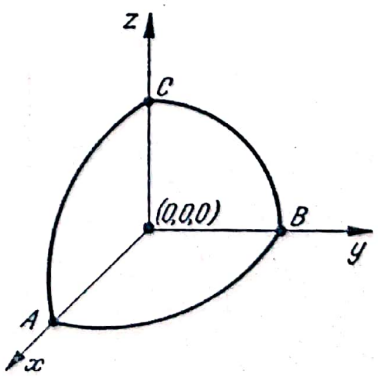

Fig. 35

R. Notăm $P(x, y) = 1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}$,

$$Q(x, y) = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$$

Trebuie ca $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Scanned with OKEN Scanner

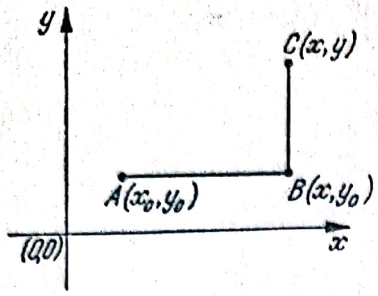

Fig. 36

Avem,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}.$$

Pentru calculul integralei considerăm segmentul de dreaptă ce unește punctele A și B.

Avem AB: $x = t$, $y = \pi$, $t \in [1, 2]$.

$$I = \int_1^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{t^2}\cos\frac{\pi}{t}\right) dt = \left[t + \pi \sin\frac{\pi}{t}\right]\Big|_1^2 = 1 + \pi.$$

460. Să se determine funcția $z(x, y)$, dacă

$$dz = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2)\,dx + (x^2 - 2xy + y^2)\,dy}{(x + y)^3}, \quad x + y \neq 0$$

R. Se vede imediat că partea a doua este o diferențială, deoarece:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^2 + 2xy + 5y^2}{(x + y)^3}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2 - 3xy + y^2}{(x + y)^3}\right].$$

Pentru determinantul lui $z(x, y)$ alegem conturul format din segmentele AB și BC cu $A(x_0, y_0)$, $B(x, y_0)$, $C(x, y)$, (fig. 36).

Avem AB: $\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases}$, $t \in [x_0, x]$, BC: $\begin{cases} x = x \\ y = t \end{cases}$, $t \in [y_0, y]$.

Rezultă

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{t^2 + 2ty_0 + 5y_0^2}{(t + y_0)^2}\,dt + \int_{y_0}^{y} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x + y)^3}\,dt.$$

Făcînd calculele, obținem

$$z = -\frac{2y^2}{(x + y)^2} + \ln(x + y) + C.$$

461. Să se determine funcția $u(x, y, z)$, știind că

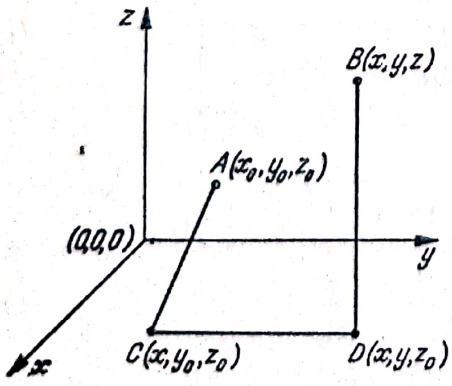

Fig. 37

$$du = \frac{(x + y - z)\,dx + (x + y - z)\,dy + (x + y + z)\,dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \neq 0.$$

R. Notăm $P(x, y, z) = \dfrac{x + y - z}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$,

$$Q(x, y, z) = \frac{x + y - z}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy},$$

$$R(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se verifică imediat că $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$.

Considerăm un contur format din segmente de dreaptă paralele la axele de coordonate, ce unește punctul $A(x_0, y_0, z_0)$ cu $B(x, y, z)$ (fig. 37).

O reprezentare parametrică a conturului este

$$AC:\begin{cases} x=t \\ y=y_0, \quad t\in[x_0,\ x]. \\ z=z_0 \end{cases}$$

$$CD:\begin{cases} x=x \\ y=t, \quad t\in[y_0,\ y]. \\ z=z_0 \end{cases}$$

$$DB:\begin{cases} x=x \\ y=y, \quad t\in[z_0,\ z]. \\ z=t \end{cases}$$

Avem,

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}\frac{t+y_0-z_0}{t^2+y_0^2+z_0^2+2ty_0}\,dt+\int_{y_0}^{y}\frac{x+t-z_0}{x^2+t^2+z_0^2+2tx}\,dt+$$

$$+\int_{z_0}^{z}\frac{x+y+t}{x^2+y^2+t^2+2xy}\,dt=\ln\sqrt{(x-y)^2+z^2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{x+y}+C.$$

462. Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de curbele $y=2x-x^2$, $x+y=0$, (fig. 38).

R. $A=\int_0^3(3x-x^2)\,dx=\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\frac{9}{2}$.

463. Să se calculeze aria mărginită de curba

$$(C):\quad y^2=\frac{x^n}{(1+x^{n+2})},\quad (x>0,\quad n>-2).$$

R. Graficul curbei (C) este simetric față de axa Ox, deci

$$A=2\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{n}{2}}}{1+x^{n+1}}\,dx.$$

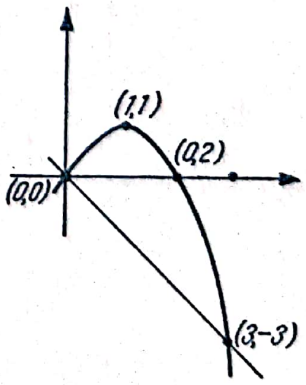

Fig. 38

Facem substituția $u=x^{\frac{n}{2}+1}$ $du=\frac{n+2}{2}x^{\frac{n}{2}}\,dx$,

și obținem

$$A=4\int_0^{\infty}\frac{du}{(n+2)(1+u^2)}=\frac{4}{n+2}\operatorname{arctg}\ u\Big|_0^{\infty}=\frac{2\pi}{n+2}.$$

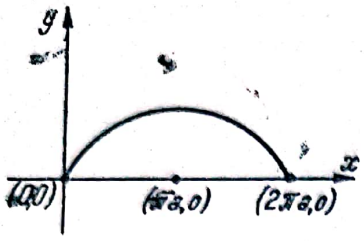

Fig. 39

464. Să se calculeze aria mărginită de curbele $(C_1): y = 0$ și $(C_2): x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi)$, (cicloidă) (fig. 39).

R. $A = \frac{1}{2}\int_{C_1 \cup C_2} (xy' - x'y)\,dt =$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a^2(t - \sin t)(1 + \cos t) - a^2(1 - \cos t)^2]\,dt.$

Făcînd calculele, se obține $A = 3\pi a^2$.

465. Să se calculeze aria mărginită de curba

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right),$$

dată cu coordonate polare (lemniscată).

$$R. \quad A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta\,d\theta = a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

466. Să se calculeze cu ajutorul integralei curbilinii aria domeniului plan mărginit de curba

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$ (bucla foliului lui Descartes) (fig. 40).

R. Facem intersecția curbei cu dreapta $y = tx$ și găsim reprezentarea parametrică

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}, \quad t \in [0, \infty),$$

unde $t = \operatorname{tg} \theta$, $\theta \left[\theta, \frac{\pi}{2}\right]$

Aria căutată este dată de

$$A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{t^2 + t^5}{(1 + t^3)^3}\,dt = \frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{t^2}{(1 + t^3)^2}\,dt = \frac{3a^2}{2}.$$

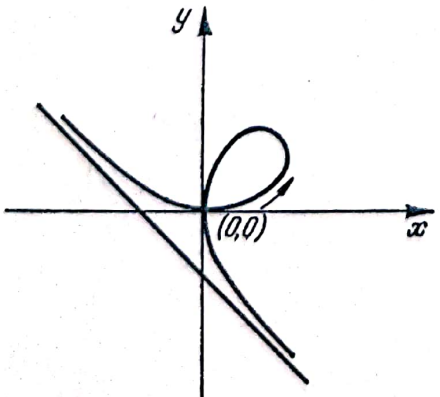

Fig. 40

467. Să se calculeze lungimea arcului de curbă definit de

$$f(x) = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant b < a).$$

$$R. \quad l = \int_0^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx =$$

$$\int_0^b \sqrt{1 + \frac{4a^2x^2}{(a^2 - x^2)^2}}\,dx = \int_0^b \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}\,dx = -$$

$$-\left[x + a \ln \left|\frac{x - a}{x + a}\right|\right]_0^b = a \ln \frac{a + b}{a - b} - b.$$

Scanned with OKEN Scanner

468. Să se calculeze lungimea arcului de curbă

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad t \in [0, 2\pi).$$

R. $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} a\, dt = 2\pi a.$

469. Să se calculeze lungimea arcului de curbă

$$r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

R. Dacă arcul de curbă este dat în coordonate polare (r, φ), $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [a, b]$ atunci

$$l = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

Deci,

$$l = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{th}^2\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4 \operatorname{ch}^4 \frac{\varphi}{2}}}\, d\varphi = \frac{a}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} \sqrt{1 + 4 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2} - 1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = \left[a - 2 \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}\right]\Big|_0^{2\pi} = 2(a\pi - \operatorname{th}\pi).$$

470. Să se calculeze volumul corpului născut prin rotirea arcului de curbă $f(x) = x\sqrt{\ln x}$, $x \in [1, e]$, în jurul axei Ox.

$$R.\ V = \pi\int_1^e f^2(x)\, dx = \pi\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \frac{\pi x^3}{3} \ln x\Big|_1^e -$$

$$- \frac{\pi}{3}\int_1^e x^2\, dx = \frac{\pi e^3}{3} - \frac{\pi}{9}(e^3 - 1) = \frac{\pi}{9}(2e^2 + 1).$$

471. Să se calculeze volumul mărginit de suprafețele S_1: $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, S_2: $x^2 + y^2 = 2az$, $a > 0$ (fig. 41).

R. Intersecția suprafețelor S_1 și S_2 este un cerc situat în planul $z = a$. Intersecțiile corpului cu plane perpendiculare pe axa Oz sînt cercuri

$$C_1 : x^2 + y^2 = 2az \quad 0 \leqslant z \leqslant a,$$

$$C_2 : x^2 + y^2 = 3a^2 - z^2, \quad a \leqslant z \leqslant a\sqrt{3}.$$

Notăm $S_1(z)$ și $S_2(z)$ ariile acestor cercuri.
Avem $S_1(z) = 2\pi az$ și $S_2(z) = \pi(3a^2 - z^2)$.
De unde,

$$V = \int_0^a S_1(z)\, dz + \int_a^{a\sqrt{3}} S_2(z)\, dz = 2\pi a\int_0^a z\, dz +$$

$$+ \pi\int_a^{a\sqrt{3}} (3a^2 - z^2)\, dz = \pi a z^2\Big|_0^a + \pi\left[3a^2 z -\right.$$

$$\left. - \frac{z^3}{3}\right]\Big|_a^{a\sqrt{3}} = \frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3} - 5).$$

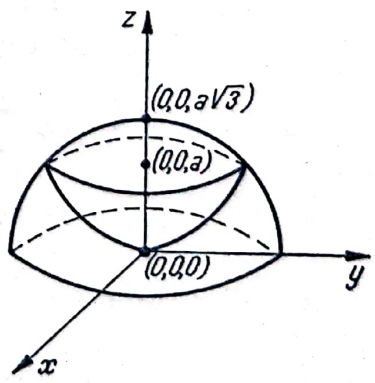

Fig. 41

Scanned with OKEN Scanner

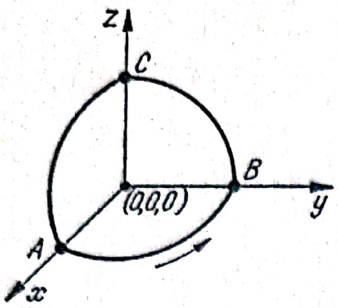

Fig. 42

472. Să se găsească centrul de greutate al triunghiului sferic

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ (fig. 42).

R. Coordonatele centrului de greutate sînt date de formulele

$$x_G = \frac{\int_C x\,ds}{\int_C ds}, \quad y_G = \frac{\int_C y\,ds}{\int_C ds}, \quad z_G = \frac{\int_C z\,ds}{\int_C z\,ds}$$

Curba C este reuniunea arcelor AB, BC, CA de reprezentări parametrice:

$$AB: \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi, \\ z = 0 \end{cases} \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = a\,d\varphi,$$

$$BC: \begin{cases} x = 0 \\ y = a\cos\varphi, \\ z = a\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad ds = a\,d\varphi;$$

$$CA: \begin{cases} x = a\sin\varphi \\ y = 0 \\ z = a\cos\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \quad ds = a\,d\varphi.$$

$$\int_C ds = \int_{AB} ds + \int_{BC} ds + \int_{CA} ds = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\,d\varphi = \frac{3a\pi}{2};$$

$$\int_C x\,ds = \int_{AB} x\,ds + \int_{BC} x\,ds + \int_{CA} x\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos\varphi\,d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin\varphi\,d\varphi = 2a^2.$$

De unde

$$x_G = \frac{2a^2}{\frac{3a\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi}.$$

În mod analog $y_G = \frac{4a}{3\pi}$, $z_G = \frac{4a}{3\pi}$.

473. Să se afle aria suprafeței născută prin rotirea arcului definit de $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2b}$, $-b \leqslant x \leqslant b$, în jurul axei Ox.

R. $A = 2\pi\int_{-b}^{b} \cos\frac{\pi x}{2b}\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4b^2}\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\,dx =$

$$= 4\pi\int_0^{l} \cos\frac{\pi x}{2b}\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4b^2}\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\,dx.$$

Facem substituția $u = \frac{\pi}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}$ și obținem

$$A = 2\sqrt{\pi^2 + 4b^2} + \frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi + \sqrt{\pi^2 + 4b^2}}{2b}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XIII

INTEGRALE DUBLE ȘI DE SUPRAFAȚĂ. INTEGRALE TRIPLE

474. Să se schimbe ordinea de integrare în integralele:

$$I = \int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y)\, dy.$$

R. Frontiera domeniului de integrare este formată din arcul de parabolă $y + 1 = \frac{x^2}{4}$ cuprins între punctele $A(-6, 8)$ și $B\ (2, 0)$ cu vîrful $v(0, -1)$ și segmentul din dreapta $y = 2 - x$ (fig. 43).
Avem

$$I = \int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} f(x, y)\, dx + \int_{0}^{8} dy \int_{-2\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y)\, dx.$$

475. $I = \int_{1}^{e} dy \int_{0}^{\ln y} f(x, y)\, dx.$

R. Domeniul de integrare este $1 \leqslant y \leqslant l$, $0 \leqslant x \leqslant \ln y$ (fig. 44). Schimbînd ordinea de integrare se obține

$$I = \int_{0}^{1} dx \int_{e^x}^{e} f(x, y)\, dy$$

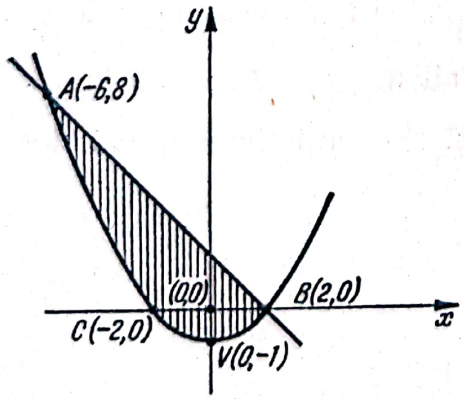

Fig. 43

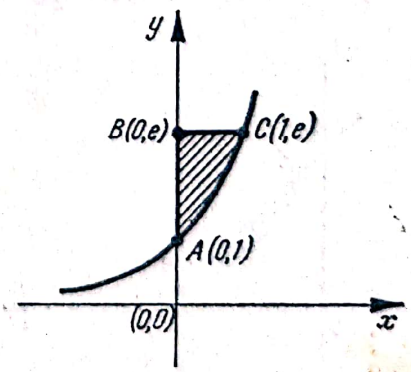

Fig. 44

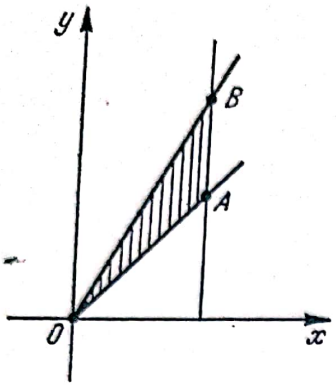

Fig. 45

476. Să se treacă la coordonatele polare ρ și φ punînd $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ în integrala

$$I = \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(x^2 + y^2)\, dy.$$

R. Domeniul de integrare este triunghiul de vîrfuri $O(0, 0)$ $A(2, 2)$, $B(2, 2\sqrt{3})$ (fig. 45). Rezultă

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} \rho f(\rho)\, d\rho$$

477. Să se calculeze

$$I = \iint_D \frac{x\, dx\, dy}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)^3}}, \quad \text{unde} \quad D : [1, 2]\times[1, 2].$$

R. $I = \int_1^2 dy \int_1^2 \frac{x\, dx}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)^3}}$

Calculăm

$$\int_1^2 \frac{x\, dx}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\Big|_1^2 = -\frac{1}{\sqrt{5 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{2 + y^2}},$$

deci,

$$I = -\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{5 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{2 + y^2}}\right) dy = \ln\frac{y + \sqrt{2 + y^2}}{y + \sqrt{5 + y^2}}\Big|_1^2 = \ln\frac{9 + 3\sqrt{6}}{5(1 + \sqrt{3})}.$$

478. Să se calculeze:

$I = \iint_D xy\, dx\, dy$, unde D este domeniul limitat de curbele $xy = 1$, $x + y = \frac{5}{2}$.

R. Frontiera domeniul D este formată din arcul hiperbolei echilatere $xy = 1$ cuprins între punctele $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ și $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ și segmentul din dreapta $x + y = \frac{5}{2}$ mărginit de punctele A și B (fig. 46).

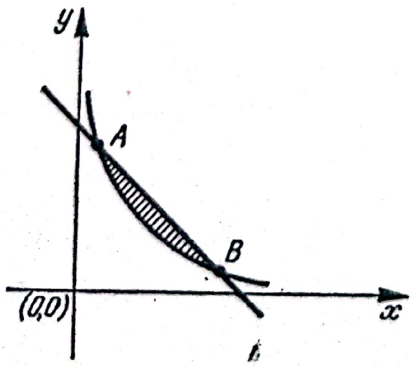

Fig. 46

Punctele A și B se obțin intersectînd hiperbola cu dreapta.

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 x\, dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} y\, dy = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^2 x\left[\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 - \frac{1}{x^2}\right] dx = \frac{165}{128} - \ln 2$$

Scanned with OKEN Scanner

479. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \sqrt{|y - x^2|}\, dx\, dy,$$

unde D este domeniul: $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, 1]$ (fig. 47).

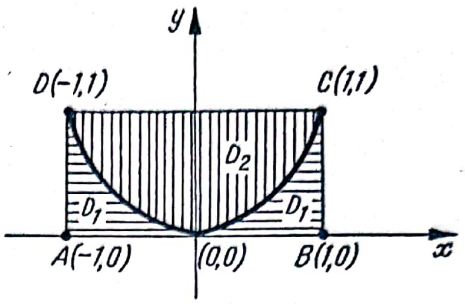

Fig. 47

Avem,

$$|y - x^2| = \begin{cases} y - x^2, & \text{dacă} \quad y - x^2 \geqslant 0, \\ x^2 - y, & \text{dacă} \quad y - x^2 < 0. \end{cases}$$

Curba $y = x^2$ împarte domeniul D în două subdomenii D_1 și D_2

$$I = \iint_{D_1} \sqrt{x^2 - y}\, dx\, dy + \iint_{D_2} \sqrt{y - x^2}\, dx\, dy,$$

unde

$$D_1 : \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant x^2, \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Avem,

$$\iint_{D_1} \sqrt{x^2 - y}\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{x^2} \sqrt{x^2 - y}\, dy = \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} x^3\, dx = \frac{1}{3},$$

$$\iint_{D_2} \sqrt{y - x^2}\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} \sqrt{y - x^2}\, dy = \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} \sqrt{(1 - x^2)^3}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

Deci, $I = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}$.

480. Să se calculeze

$I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, unde D este interiorul cercului

$$x^2 + y^2 - x - y = 0.$$

Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \rho \cos \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi), \\ y = \frac{1}{2} + \rho \cos \theta \quad \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]. \end{cases}$$

$$dx\, dy = \rho\, d\rho\, d\theta,$$

și obținem,

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} + \rho^2 + \rho \cos \theta + \rho \sin \theta\right) \rho\, d\rho = \frac{3\pi}{16}.$$

Scanned with OKEN Scanner

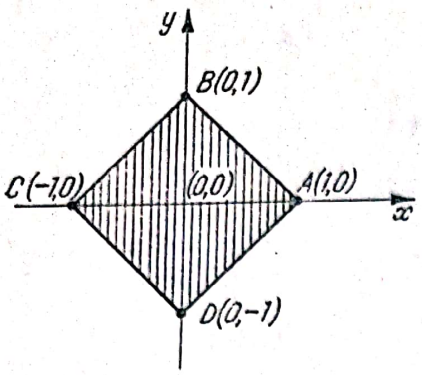

Fig. 48

481. $I = \iint_D (|x| + |y|)\,dx\,dy$ unde

$$D: |x| + |y| \leqslant 1.$$

R. Domeniul este cel haşurat în (fig. 48).

$$I = \iint_{D_1} (x + y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} (-x + y)\,dx\,dy +$$

$$+ \iint_{D_3} + (-x - y)\,dx\,dy + \iint_{D_4} (x - y)\,dx\,dy$$

unde,

$$D_1: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x, \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 + x, \end{cases}$$

$$D_3: \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -1 - x \leqslant y \leqslant 0, \end{cases} \qquad D_4: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x - 1 \leqslant y \leqslant 0. \end{cases}$$

Făcînd calculele obţinem $I = \frac{4}{3}$.

482. Să se calculeze,

$$I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}\,dx\,dy, \quad \text{unde} \quad D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 \leqslant 0.$$

R. Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta, & 0 \leqslant \theta < 2\pi, \\ y = 3\rho\sin\theta & 0 \leqslant \rho \leqslant 1, \end{cases} \qquad dx\,dy = 6\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Rezultă

$$I = 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1 - \rho^2}\,d\rho = -4\pi(1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = 4\pi.$$

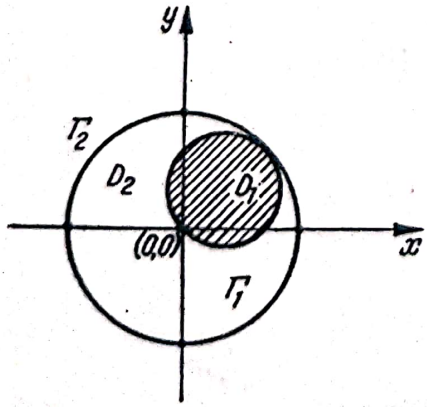

Fig. 49

483. Să se calculeze

$$I = \iint_D \left| \frac{x + y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx\,dy, \quad \text{unde} \quad D: x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

R. Ecuaţia $x^2 + y^2 - \frac{x + y}{\sqrt{2}} = 0$ este un cerc Γ_1 cu centrul $C\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ şi raza $\frac{1}{2}$, iar ecuaţia $x^2 + y^2 - 1 = 0$ reprezintă un cerc Γ_2 cu centrul $0(0, 0)$ şi raza 1, (fig. 49).

Scanned with OKEN Scanner

Notăm D_1 interiorul cercului Γ_1 și $D_2 = D - D_1$

Avem

$$\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| = \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}, & \text{dacă} \quad (x, y) \in D_2, \\ \frac{x+y^2}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2, & \text{dacă} \quad (x, y) \in D_1, \end{cases}$$

de unde,

$$I = \iint_{D_2}\left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)dx\,dy - \iint_{D_1}\left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)dx\,dy.$$

Adunăm și scădem pe $\iint_{D_1}\left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)dx\,dy$,

obținem,

$$I = \iint_{D}\left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)dx\,dy - 2\iint_{D_1}\left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)dx\,dy =$$

$$= I_1 - 2I_2.$$

Pentru calculul lui $I_1 = \iint_{D}\left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)dx\,dy$ facem schimbarea de variabile,

$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ și obținem,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\rho^3 - \rho^2\,\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sqrt{2}}\right)d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

Pentru calculul lui $I_2 = \iint_{D_1}\left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)dx\,dy$, facem schimbarea de variabile

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \rho\cos\theta, \quad y = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \rho\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2};$$

$$I_2 = \int_0^2 d\theta \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\rho^3 - \frac{\rho}{4}\right)d\rho = 2\pi\left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^2}{8}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{32}$$

Obținem

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16} + \frac{9\pi}{16}.$$

Folosind formula lui Green, să se calculeze următoarele integrale:

484. $I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]\,dy,$

unde C este cercul, $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$.

R. Notăm $P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}]$,

Scanned with OKEN Scanner

Avem,

$$I = \oint_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

unde D este interiorul cercului C.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y\left(y + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{deci} \quad I = \iint_D y^2\,dx\,dy.$$

Facem schimbarea de variabile $x = 2 + \rho\cos\theta$, $y = 3 + \rho\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\rho \in [0, 1]$, și obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho(9 + 6\rho\sin\theta + \rho^2\sin^2\theta)\,d\rho = 10\pi.$$

485. $I = \oint_C xy^2\,dy - x^2y\,dx$, unde C este cercul $x^2 + y^2 = a^2$.

R. $$I = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = \frac{\partial}{\partial y}(-x^2y)\right] dx\,dy = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

unde D este interiorul cercului C.

Facem schimbarea: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$ $\rho \in [0, a]$ și obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^3\,d\rho = \frac{\pi a^4}{2}.$$

486. Să se calculeze

$$I = \int_{ABO} (e^x \sin y - my)\,dx + (e^x \cos y - m)\,dy,$$

unde ABO este semicercul $x^2 + y^2 - ax = 0$, $y \geqslant 0$ parcurs în sens trigonometric (fig. 50).

R. Completăm conturul ABO cu segmentul OA și avem

$$I = \oint_{OABO} (e^x \sin y - my)\,dx + (e^x \cos y - m)\,dy -$$

$$-\int_{OA} (e^x \sin y - my)\,dx + (e^x \cos y - m)\,dy = I_1 - I_2$$

Pentru calculul integralei I_1 folosind formula lui Green, avem

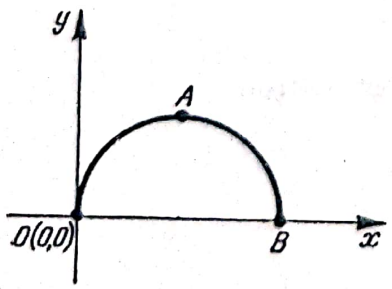

Fig. 50

$$I_1 = m\iint_D dx\,dy = \frac{m\pi a^2}{8},$$

$$I_2 = \int_{OA} (e^x \sin y - my)\,dx + (e^x \cos y - m)\,dy.$$

O reprezentare parametrică a segmentului OA

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \end{cases} \quad t \in [0, a].$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă $I_2 = 0$ şi deci

$$I = \frac{m\pi a^2}{8}.$$

487. Să se calculeze

$I = \iint_S (x + y + z)\, d\sigma$, unde S este suprafaţa $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.

R. Considerăm reprezentarea parametrică a semisferei:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \sin\theta., \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases} \qquad \varphi\in[0, 2\pi), \quad \theta\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\varphi = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, unde $E = x_\theta'^2 + y_\theta'^2 + z_\theta'^2$

$G = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2$, $F = x_\theta' x_\varphi' + y_\theta' y_\varphi' + z_\theta' z_\varphi'$.

Rezultă

$$I = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta\cos\varphi + \sin^2\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\theta)\, d\varphi =$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \pi a^3 \sin^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^3.$$

488. Să se calculeze

$I = \iint_S |xyz|\, d\sigma$, unde S porţiunea din suprafaţa paraboloidului $z = x^2 + y^2$, decupată de planul $z = 1$ (fig. 51).

R. $d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$, unde $p = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$.

Deci $d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy$

Rezultă, $I = \iint_D |xy|\,(x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy$,

unde D este domeniul, $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta\in[0, 2\pi), \quad \rho\in[0, 1],$$

$$I = \int_0^{2\pi} |\sin\theta\cos\theta|\, d\theta \int_0^1 \rho\sqrt[5]{1 + 4\rho^2}\, d\rho =$$

$$= \frac{125\sqrt{5} - 1}{420}.$$

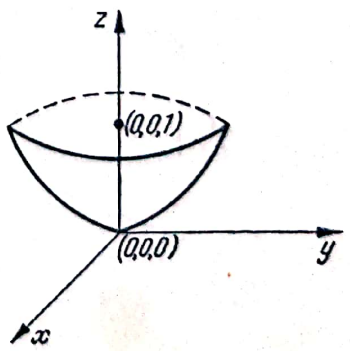

Fig. 51

489. Să se calculeze

$\iint_S (xy + yz + zx)\,d\sigma$, S fiind porțiunea din suprafața conică $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $a > 0$.

R. Avem $d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy$, de unde

$I = \iint_D \sqrt{2}[xy + (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}]\,dx\,dy$, unde D este interiorul cercului $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

Facem schimbarea de variabile $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \rho \leqslant 2a\cos\theta$ și obținem

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{2}[\rho^3 \sin\theta\cos\theta + \rho^3(\sin\theta + \cos\theta)]\,d\rho =$$

$$= 4a^4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta\cos^5\theta + \sin\theta\cos^4\theta + \cos^5\theta)\,d\theta = \frac{64a^4\sqrt{2}}{15}.$$

490. Să se calculeze

$I = \iint_S xy\,dy\,dz + yz\,dz\,dx + zx\,dx\,dy$, unde S este fața exterioară a suprafeței piramidei mărginită de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$, $a > 0$ (fig. 52).

R. $I = \iint_{AOB} xy\,dy\,dz + yz\,dz\,dx + zx\,dx\,dy + \iint_{BOC} xy\,dy\,dz + yz\,dz\,dx + zx\,dx\,dy + \iint_{COA} xy\,dy\,dz + yz\,dz\,dx + zx\,dx\,dy + \iint_{ABC} xy\,dx\,dy + yz\,dz\,dx + zx\,dx\,dy.$

Pentru cele patru fețe ale piramidei avem:

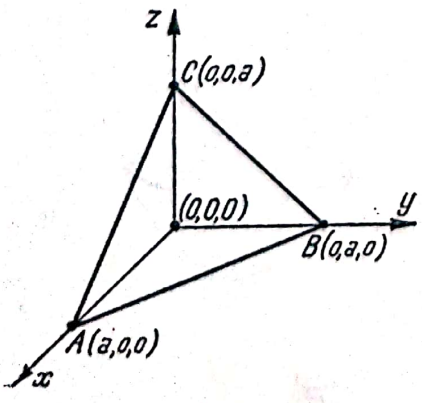

Fig. 52

AOB: $z = 0$, $x + y \leqslant a$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Cosinușii directori ai normalei la suprafața AOB sînt $(0, 0, -1)$,

BOC: $x = 0$, $y + z \leqslant a$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Cosinușii directori ai normalei la suprafața BOC sînt $(-1, 0, 0)$,

COA: $y = 0$, $x + z \leqslant a$, $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Cosinușii directori ai normalei la suprafața COA sînt $(0, -1, 0)$,

ABC: $z = a - x - y$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, Cosinușii directori ai normalei la suprafața ABC sînt $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Integralele pe fețele AOB, BOC, COA sînt nule, deci

$$I = \iint_{ABC} xy\,dy\,dz + yz\,dz\,dx + zx\,dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{ABC} (xy + yz + zx)\,d\sigma =$$

$$= \iint_D [(x + y)(a - x - y) + xy]\,dx\,dy,$$

$$D:\ x + y \leqslant 1 \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0$$

de unde

$$I = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (ax + ay - x^2 - y^2 - xy)\,dy = \frac{a^4}{8}.$$

491. Să se calculeze

$I = \iint_S \frac{dy\,dz}{x} + \frac{dz\,dx}{y} + \frac{dx\,dy}{z}$, unde S este fața exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

R. O reprezentare parametrică a elipsoidului este

$$x = a \cos \varphi \sin \theta, \quad y = b \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c \cos \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Notăm α, β, γ cosinușii directori ai normalei la suprafața S și avem

$$I = \iint_S \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z}\right) d\sigma = \iint_D \left(\frac{A}{a \sin \theta \cos \varphi} + \frac{B}{b \sin \theta \sin \varphi} + \frac{C}{c \cos \theta}\right) d\theta\,d\varphi,$$

unde

$$A = \frac{D(y, z)}{D(\theta, \varphi)} = bc \sin^2 \theta \cos \varphi, \qquad B = \frac{D(z, x)}{D(\theta, \varphi)} = ac \sin^2 \theta \sin \varphi,$$

$$C = \frac{D(x, y)}{D(\theta, \varphi)} = ab \sin \theta \cos \theta.$$

Înlocuind rezultă,

$$I = \int_0^\pi \sin \theta\,d\theta \int_0^{2\pi} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) d\varphi = 4\pi \left[\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right].$$

Folosind formula lui Stokes, să se calculeze următoarele integrale:

492. $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, unde C este cercul: $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, parcurs în sens trigonometric, față de prima bisectoare a axelor în sensul crescător al coordonatelor.

R. Luăm ca suprafața S, suprafața planului $x + y + z = 0$, decupată de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Cosinușii normalei la suprafața $z = -x - y$ sînt: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, iar $d\sigma = \sqrt{3}\,dx\,dy$. Obținem

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = -3\iint_D dx\,dy,$$

unde D este proiecția cercului $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (cerc mare) pe planul xoy.

$$\iint_D dx\,dy = \text{Aria } D = \frac{\pi R^2}{\sqrt{3}},$$

deci

$$I = \oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = -3\pi R^2.$$

493. $I = \oint_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, unde C este elipsa $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} - 1 = 0$, $(a > 0,\ b > 0)$ parcursă în sens direct față de axa Ox.

R. Aplicăm formula lui Stokes și avem

$I = -2\iint_S dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy$, unde S este porțiunea din fața superioară a planului $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, interioară cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$.

Ecuația suprafeței S este $z = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, iar cosinușii directori ai normalei la suprafață sînt $\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ deci

$$I = -2\iint_S dy\,dz + dz\,dy + dx\,dy = -2\,\frac{(a + b)}{a}\iint_D dx\,dy,$$

unde D este interiorul cercului de ecuație $x^2 + y^2 = a^2$.

Obținem

$$I = \oint_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz = -2\pi a(a + b).$$

494. Să se calculeze

$I = \int_C zx\,dx + xy\,dy + yz\,dz$, unde C este curba de intersecție a cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$, cu planele de coordonate și cu planul $z = h$, $(h > 0)$ situată în primul octant și parcursă în sensul din figura 53.

R. Aplicăm formula lui Stokes și obținem

$$I = \oint_C zx\,dx + xy\,dz + yz\,dz = \iint_S z\,dy\,dz + x\,dz\,dx + y\,dx\,dy,$$

unde S, fața exterioară a suprafeței cilindrului situată în primul octant, între planele $z = 0$, $z = h$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru suprafața S avem reprezentarea parametrică:

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = z, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqslant z \leqslant h, \quad d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, dz = a\, d\theta\, dz.$$

Notînd α, β, γ cosinușii normalei la suprafața S avem $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$, $\gamma = 0$, de unde

$$I = a\int_0^h\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(a\sin\theta + z)\, d\theta\, dz = \frac{ah}{2}(a + h).$$

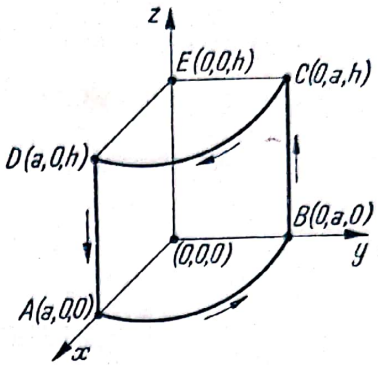

Fig. 53

495. Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curbele:

$$x^2 + y^2 = 8, \quad y^2 = 2x, \quad (y^2 \leqslant 2x), \quad \text{(fig. 54)}.$$

R. Aria domeniului plan D este dată de $A = \iint_D dx\, dy$

$$A = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} dy + \int_2^{2\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}} dy = 2\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}\, dx +$$

$$+ 2\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}\, dx = 2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^2 + 2\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}\, dx = \frac{16}{3} + 2I, \text{ unde}$$

$$I = \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}\, dx.$$

Facem substituția $x = 2\sqrt{2}\sin t$ și obținem

$$I = 8\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \pi - 2,$$

de unde, $A = 2\pi + \frac{4}{3}$.

496. Să se calculeze aria domeniului plan format din punctele exterioare cercului $x^2 + y^2 = a^2$ și interioare lemniscatei lui Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (fig. 55).

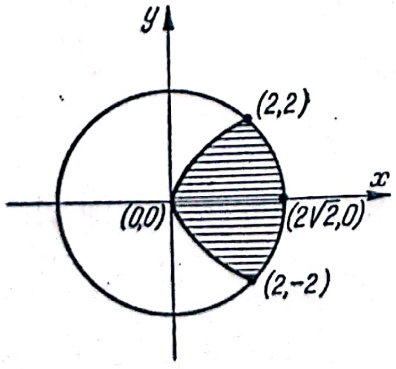

Fig. 54

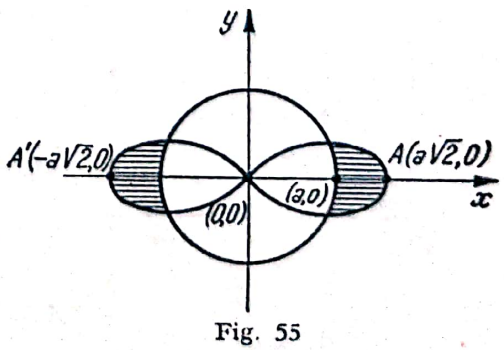

Fig. 55

R. Din simetria domeniului rezultă $A = 4\iint_D dx\,dy$, unde D este definit de: $x^2 + y^2 \geqslant a^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 2a^2(x^2 - y^2)$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Trecînd la coordonate polare, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

$$a \leqslant \rho \leqslant a\sqrt{2\cos 2\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \text{ rezultă}$$

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_a^{\sqrt{2\cos 2\theta}} \rho\, d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2(2\cos 2\theta - 1)\, d\theta = 2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

497. Să se calculeze aria domeniului plan D limitat de curbele: $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $x = 0$, $y = 0$ situat în primul cadran.

R. $A = \iint_D dx\,dy$.

Facem schimbarea de variabile:

$$x = a\rho\cos^2\theta, \quad y = b\rho\sin^2\theta, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\theta + \frac{b^2}{h^2}\sin^4\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Avem $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = 2ab\,\rho\sin\theta\cos\theta$ de unde

$$A = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^4\theta + \frac{b^2}{h^2}\sin^4\theta}} \rho\, d\rho =$$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2}{h^2}\cos^4\theta + \frac{b^2}{h^2}\sin^4\theta\right)\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2}\right).$$

498. Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curbele

$(C_1): x + y = a$, $(C_2): x + y = b$, $(C_3): y = px$, $(C_4): y = qx$,

$(0 < a < b, \quad 0 < p < q)$, (fig. 56).

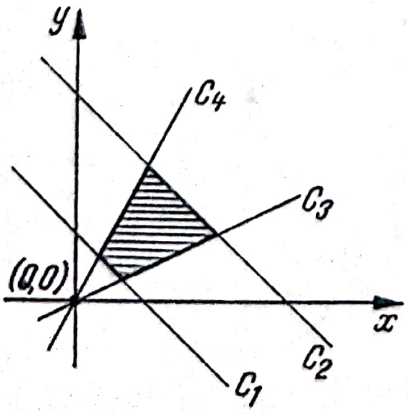

Fig. 56

R. $A = \iint_D dx\,dy$.

Facem schimbarea de variabile

$u = x + y$, $v = px$, $u \in [a, b]$, $v \in [p, q]$.

Avem $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{u}{(1 + v)^2}$, de unde

$$A = \int_a^b u\, du \int_p^q \frac{dv}{(v + 1)^2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\frac{(q - p)}{(p + 1)(q + 1)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

499. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafețele:

$$z = \alpha x, \quad z = \beta x, \quad x^2 + y^2 = 2ax, \quad (0 < \alpha < \beta), \quad a > 0.$$

R. $V = \iint_D (\beta - \alpha)\, x\, dx\, dy$, unde D este interiorul cercului $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

Trecem la coordonate polare $x = a + \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\rho \in [0, a]$, obținem

$$V = (\beta - \alpha)\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho(a + \rho\cos\theta)\, d\theta = \pi(\beta - \alpha)\, a^3.$$

500. Să se calculeze volumul limitat de suprafețele $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

R. $V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy, \quad D: -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad x^2 \leqslant y \leqslant 1.$

Avem

$$V = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2)\, dy = \int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx = \frac{88}{105}.$$

501. Să se calculeze partea din suprafața $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ interioară conului $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$ (fig. 57).

R. $A = \iint_S d\sigma.$

O reprezentare parametrică a lui S este $x = a\sin\theta\cos\varphi$, $y = a\sin\theta\sin\varphi$, $z = a\cos\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Obținem,

$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\varphi, \quad D: \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

$$E = x_\theta'^2 + y_\theta'^2 + z_\theta'^2 = a^2,$$
$$G = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = a^2\sin^2\theta,$$
$$F = x_\theta' x_\varphi' + y_\theta' y_\varphi' + z_\theta' z_\varphi' = 0.$$

$$S = a^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta = a^2(2 - \sqrt{2}).$$

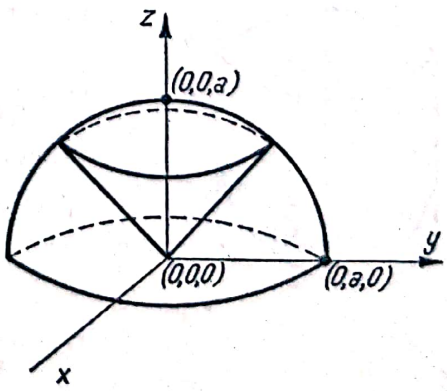

Fig. 57

502. Să se calculeze aria suprafeței, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z > 0$, pentru care:

$$x + y \leqslant a, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Avem $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$A = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy, \text{ unde } D: x + y \leqslant a,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

$$A = a\int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = a\int_0^a \operatorname{Arcsin} dx = \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}\Big|_0^{a-x} dx =$$

$$= a\int_0^a \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\, dx.$$

Facem substituţia $t = \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ şi obţinem

$$A = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t \cos t}{(1 + \sin^2 t)^2}\, dt$$

Folosim metoda de integrare prin părţi şi obţinem

$$A = 2a^2 \left[-\frac{t}{1 + \sin^2 t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \sin^2 t} = -\frac{a^2\pi}{2} + 2a^2 I_1,$$

$$\text{unde } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \sin^2 t}.$$

Pentru calculul lui I_1 facem substituţia $u = \operatorname{tg} t$ şi avem

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{du}{2u^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}u \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

de unde,

$$A = \frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

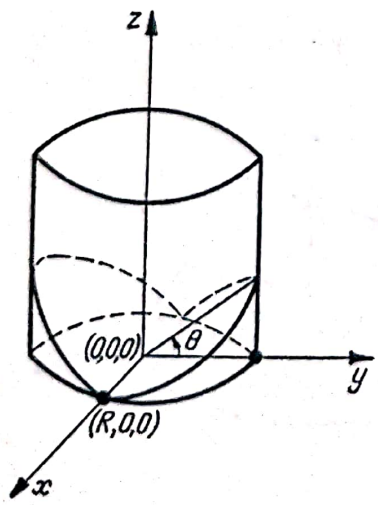

Fig. 58

503. Dintr-un trunchi cilindric de rază R (fig. 58) trebuie să facem o pană, tăindu-l cu două plane care trec printr-un diametru al bazei şi fac cu acesta un unghi θ. Ce cantitate de material se aruncă.

R. Ecuaţia cilindrului este $x^2 + y^2 = R^2$, iar ecuaţiile planelor sînt $x = \pm y \operatorname{tg} \theta$.

Din motive de simetrie luăm numai unul din plane.

$$V = 2 \operatorname{tg} \theta \iint_D y\, dx\, dy = 2 \operatorname{tg} \theta \int_0^{\pi} \sin \varphi\, d\varphi \int_0^R \rho^2\, d\rho =$$

$$= \frac{4R^3}{3} \operatorname{tg} \theta$$

D este semicercul $x^2 + y^2 = R^2$, $y > 0$, $z = 0$).

Volumul definit mai sus se numeşte şi copita cilindrică.

Scanned with OKEN Scanner

504. Să se afle coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane omogene, mărginită de curbele

$$y^2 = 2ax, \quad x^2 = 2ay \quad \text{(fig. 59)}.$$

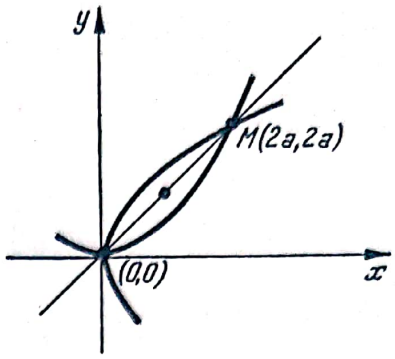

Fig. 59

R. Din motive de simetrie coordonatele centrului se găsesc pe prima bisectoare, deci $x_G = y_G$, unde

$$x_G = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}.$$

$$I_1 = \int_0^{2a} x\,dx \int_{\frac{x^2}{2a}}^{\sqrt{2ax}} dy = \int_0^{2x} x\left(\sqrt{2ax} - \frac{x^2}{2a}\right) dx,$$

$$I_1 = \left[\frac{2}{5}\sqrt{2a}\,x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{2a}\right]_0^{2a} = \frac{6}{5}a^3$$

$$I_2 = \int_0^{2a} dx \int_{\frac{x^2}{2a}}^{\sqrt{2ax}} dy = \int_0^{2a}\left(\sqrt{2ax} - \frac{x^2}{2a}\right) dx = \frac{4}{3}a^2.$$

$$x_G = y_G = \frac{6}{5}a^3 \cdot \frac{3}{4a^2} = \frac{9}{10}a.$$

505. Să se calculeze momentul de inerție în raport cu originea unei plăci plane omogene mărginită de curbele $y = 0$, $x + y - 6 = 0$, $y^2 = 8x$, (fig. 60).

R. Intersectînd curbele, obținem puncte $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(0, 6)$. Momentul de inerție în raport cu originea este

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{8}}^{6-y} (x^2 + y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right)\Big|_{\frac{y^2}{8}}^{6-y} dy = \int_0^4 \left[\frac{(6-y)^3}{3} + y^2(6-y) - \frac{y^6}{3\cdot 8^3} - \frac{y^4}{8}\right] dy.$$

Făcînd calculele obținem $I_0 = 136 - \frac{128}{5} - \frac{32}{21}$.

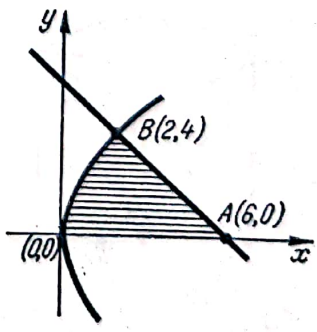

Fig. 60

Să se calculeze următoarele integrale triple:

506. $I = \iiint_D \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^n}$,

unde $D: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1 \end{cases} \quad n > 3.$

R. $$I=\int_0^1 x\,dx\int_0^1 y\,dy\int_0^1 \frac{z\,dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^n}=$$

$$=-\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1 x\,dx\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2+z^2)^{n-1}}\Big|_0^1 dy=$$

$$=-\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1 x\,dx\int_0^1\left[\frac{y}{(2+x^2+y^2)^{n-1}}-\frac{y}{(1+x^2+y^2)^{n-1}}\right]dy=$$

$$=\frac{1}{4(n-1)(n-2)}\int_0^1 x\left[\frac{1}{(2+x^2+y^2)^{n-2}}-\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{n-2}}\right]\Big|_0^1 dx=$$

$$=\frac{1}{4(n-1)(n-2)}\int_0^1 x\left[\frac{1}{(3+x^2)^{n-2}}-\frac{2}{(2+x^2)^{n-2}}+\frac{1}{(1+x^2)^{n-2}}\right]dx=$$

$$=\frac{1}{8(n-1)(n-2)(n-3)}\left(1+\frac{81}{3^n}-\frac{64}{4^n}-\frac{24}{2^n}\right).$$

507. $I=\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(a+x+y+z)^4}$, $a>0$, $D:\begin{cases}x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0\\ x+y+z\leqslant a.\end{cases}$

$$I=\int_0^a dx\int_0^{a-x} dy\int_0^{a-x-y}\frac{dz}{(a+x+y+z)^4}=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^a dx\int_0^{a-x}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\Big|_0^{a-x-y}dy=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^a dx\int_0^{a-x}\left[\frac{1}{(2a)^3}-\frac{1}{(a+x+y)^3}\right]dy=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^a\left[\frac{a-x}{(2a)^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2a)^2}-\frac{1}{2(a+x)^2}\right]dx=\frac{1}{48a}.$$

508. $I=\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, D fiind domeniul limitat de suprafaţa conică $z=\sqrt{x^2+y^2}$ şi planul $z=a>0$ (fig. 61).

Proiecţia domeniului D în planul xOy este cercul D': $x^2+y^2\leqslant a^2$, $z=0$.

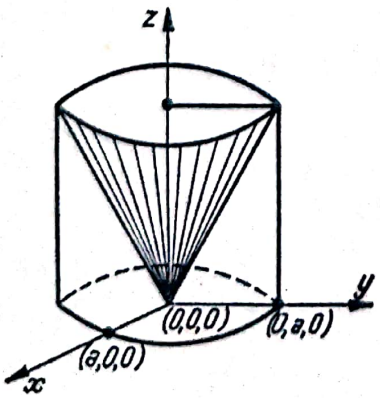

Fig. 61

Obţinem

$$I=\iiint_{D'}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^a dz=$$

$$=\iint_{D'}[a\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)]\,dx\,dy.$$

Trecînd la coordonate polare: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $0\leqslant\rho\leqslant a$, $0\leqslant\theta<2\pi$ obţinem

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(a\rho^2-\rho^3)\,d\rho=\frac{\pi a^4}{6}.$$

Scanned with OKEN Scanner

509. $I = \iiint_D (2az + z^2)\,dx\,dy\,dz$, unde D este corpul mărginit de suprafața $S: \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

R. Suprafața S se mai poate scrie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \quad -c \leqslant z \leqslant c.$$

Suprafața este definită pentru $-c \leqslant z \leqslant c$, secțiunile sale prin plane perpendiculare pe axa Oz sînt elipse de semiaxe:

$$a\sqrt[4]{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \quad b\sqrt[4]{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \quad \text{și arie} \quad S(z) = \pi ab\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$$

Avem

$$I = \int_{-c}^{c} (2az + 3z^2)\,dz \iint_{D_z} dx\,dy.$$

Dar $\iint_{D_z} dx\,dy = S(z) = \pi ab\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$, de unde

$$I = 2\pi a^2 b \int_{-c}^{c} z\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\,dz + 3\pi ab \int_{-c}^{c} z^2\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\,dz.$$

Integrantul primei integrale fiind o funcție impară, rezultă că aceasta este nulă. Integrantul celei de a doua integrale fiind o funcție pară, rezultă,

$$I = 6\pi ab \int_0^c z^2\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\,dz.$$

Facem schimbarea de variabilă $z = c\sin\theta$ și obținem

$$I = 6\pi abc^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{3\pi^2 abc^3}{8}.$$

510. $I = \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$, unde $D: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant az$ (fig. 62).

Domeniul este interiorul sferei cu centrul în $C\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$ și raza $\frac{a}{2}$.

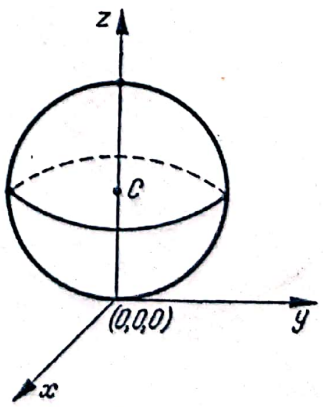

Fig. 62

R. Trecem la coordonate sferice $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ și obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r^3 \sin\theta\,dr =$$

$$= \frac{\pi a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^4\theta\,d\theta = -\frac{\pi a^4}{10}\cos^5\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{10}.$$

511. $I = \iiint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\, dx\, dy\, dz$, unde D este interiorul elipsoidului: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

R. Facem schimbarea de variabile

$$x = \arccos\varphi \sin\theta, \quad y = br \sin\varphi \sin\theta, \quad z = cr\cos\theta,$$

$$0 \leqslant r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

$$dx\, dy\, dz = abc\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Înlocuim în integrală şi avem

$$I = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 r^2 \sqrt{1 - r^2}\, dr = 4\pi abc \int_0^1 r^2 \sqrt{1 - r^2}\, dr.$$

Facem substituţia $r = \cos t$ şi rezultă

$$I = 4\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t\, dt = \frac{\pi^2 abc}{4}.$$

512. $I = \iiint_D z\, dx\, dy\, dz$, unde D este domeniul definit de $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $z \geqslant 0$, (fig. 63).

R. Intersecţia conului $x^2 + y^2 = z^2$ şi a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ este cerc situat în planul $z = \frac{a}{\sqrt{2}}$, cu centrul în punctul $C\left(0, 0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ şi raza $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Avem

$$I = \iint_{D'} dx\, dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\, dz = \frac{1}{2} \iint_{D'} (a^2 - 2x^2 - 2y^2)\, dx\, dy,$$

nde domeniul D' este interiorul cercului: $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

Facem schimbarea de variabile: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ obţinem,

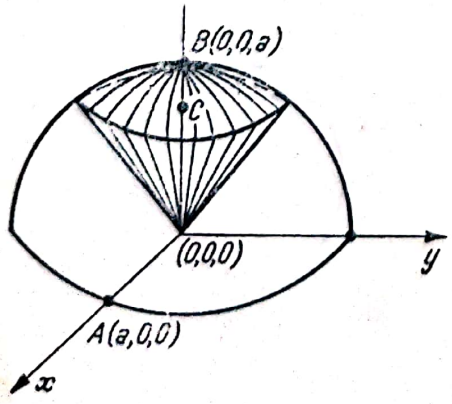

Fig. 63

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} (a^2\rho - 2\rho^3)\, d\rho =$$

$$= \pi \left(\frac{a^2\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi a^4}{8}.$$

513. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafeţele:

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 2x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad y = x^2.$$

R. $V = \iiint_D dx\, dy\, dz$, unde D este volumul limitat de suprafeţele din enunţ.

Scanned with OKEN Scanner

$$V = \iint_{\Delta} dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \iint_{\Delta} (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

unde Δ este domeniul mărginit de curbele $y = x$, $y = x^2$ sau $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 \leqslant y \leqslant x$.

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2+y^2)\,dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx = \frac{3}{35}.$$

514. Să se afle volumul corpului definit de: $x^2+y^2+z^2 \leqslant 18$, $x^2+y^2+z^2 \geqslant 8$, $x^2+y^2 \leqslant z^2$, $z > 0$ (fig. 64).

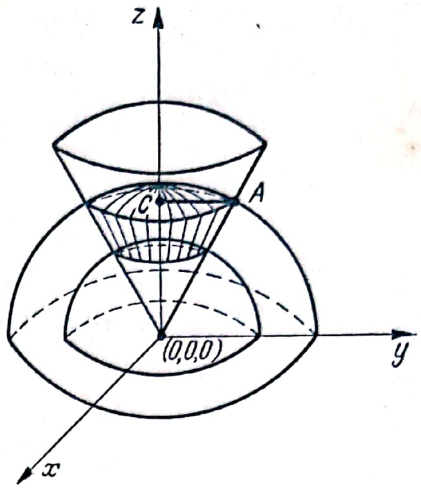

Fig. 64

R. $V = \iiint_D dx\,dy\,dz$

Intersectînd sfera $x^2+y^2+z^2 = 18$ cu conul $z^2 = x^2+y^2$, $z > 0$, obținem cercul $x^2+y^2 = 9$, $z = 3$, cu centrul în punctul $C(0, 0, 3)$ și raza $CA = 3$.

Avem $\operatorname{tg}\theta = \frac{CA}{OC} = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Folosind coordonate sferice $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $2 \leqslant r \leqslant 3$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ rezultă

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\,d\theta \int_2^3 r^2\,dr = 19\pi(2-\sqrt{2}).$$

515. Să se afle volumul corpului limitat de suprafața $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h}+\frac{y}{k}$, situat în primul octant.

R. $V = \iiint_D dx\,dy\,dz.$

Folosim coordonatele sferice generalizate

$$x = ar\cos^2\varphi\sin^2\theta, \quad y = br\sin^2\varphi\sin^2\theta, \quad z = cr\cos^2\theta,$$

$$0 \leqslant r \leqslant \frac{a\sin^2\theta\cos^2\varphi}{h} + \frac{b\sin^2\theta\sin^2\varphi}{k}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Avem $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = 4abcr^2\sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi$ deci

$$V = 4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta \int_0^{\sin^2\theta\left(\frac{a\cos^2\varphi}{h}+\frac{b\sin^2\varphi}{k}\right)} r^2\,dr =$$

$$= \frac{4abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{a\cos^2\varphi}{h}+\frac{b\sin^2\varphi}{k}\right)^3 d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9\theta\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{15}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)^3 d\varphi$$

Scanned with OKEN Scanner

Facem substituția $\sin^2\varphi = t$ și obținem

$$V = \frac{1}{15}abc\int_0^1\left[\frac{a}{h}+\left(\frac{b}{k}-\frac{a}{h}\right)t\right]^3 dt = \frac{1}{60\left(\frac{b}{k}-\frac{a}{h}\right)}\left[\frac{a}{h}+\left(\frac{b}{k}-\frac{a}{h}\right)t\right]^4\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

516. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafața, $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\right.$ $\left.+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

R. Facem schimbarea de variabile

$$x = ar\cos\varphi\sin\theta, \quad y = br\sin\varphi\sin\theta, \quad z = cr\cos\theta$$

$$0 \leqslant r \leqslant \sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

Avem $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = abc\,r^2\sin\theta$, deci

$$V = abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\sin\theta} r^2\,dr = \frac{2\pi abc}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,d\theta = \frac{\pi^2 abc}{4}.$$

517. Să se calculeze masa corpului K de densitate $\rho(x, y, z) = z$ mărginit de suprafețele $x^2+y^2+z^2 = 24$, $x^2+y^2 = 2z$.

R. $M = \iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{24-x^2-y^2}} z\,dz = \frac{1}{2}\iint_D\left[24 - x^2 - \right.$

$\left. - y^2 - \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2\right] dx\,dy$, unde D este interiorul cercului $x^2+y^2 = 8$.

Folosind coordonate polare, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $0 \leqslant \rho \leqslant 2\sqrt{2}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, rezultă

$$M = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\left(24\rho - \rho^3 - \frac{\rho^5}{4}\right)d\rho = \frac{176}{3}\pi.$$

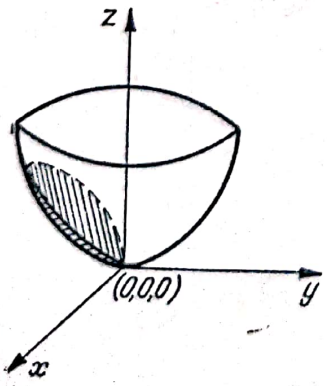

Fig. 65

518. Să se determine coordonatele centrului de greutate al unui corp omogen definit de $x^2+y^2 \leqslant 2z$ $x+y-z \leqslant 0$, (fig. 65).

R. Coordonatele centrului de greutate al unui corp omogen K sînt date de

$$x_G = \frac{\iiint_K x\,dx\,dy\,dz}{\iiint_K dx\,dy\,dz}, \qquad y_G = \frac{\iiint_K y\,dx\,dy\,dz}{\iiint_K dx\,dy\,dz},$$

$$z_G = \frac{\iiint_K z\,dx\,dy\,dz}{\iiint_K dx\,dy\,dz}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem,

$$I = \iiint_K dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} dz = \frac{1}{2}\iint_D (2x + 2y - x^2 - y^2)\,dx\,dy,$$

unde $D : x^2 + y^2 - 2(x + y) \leqslant 0$.

Facem schimbarea de variabile $x - 1 = \rho\cos\theta$, $y - 1 = \rho\sin\theta$ $0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$ şi avem

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^2 - \rho^3)\,d\rho = \pi.$$

$$I_1 = \iiint_K x\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} dz =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D x(2x + 2y - x^2 - y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^2 - \rho^3)(1 + \rho\cos\theta)\,d\rho = \pi.$$

$$I_2 = \iiint_K y\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\iint_D y(2x + 2y - x^2 - y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^2 - \rho^3)(1 + \rho\sin\theta)\,d\theta = \pi.$$

$$I_3 = \iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} z\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D \left[(x + y)^2 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{4}\right] dx\,dy.$$

Cu $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, $0 \leqslant \rho \leqslant 2(\sin\theta + \cos\theta)$, obţinem

$$I_3 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} \rho\left(\rho^2 + \rho^2\sin 2\theta - \frac{\rho^4}{4}\right) d\rho = \frac{5\pi}{3}, \quad \text{deci}$$

$$x_G = y_G = 1, \quad z_G = \frac{5}{3}.$$

519. Să se afle centrul de greutate al corpului omogen K mărginit de suprafeţele:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c, \quad c > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

R. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant\frac{z^2}{c^2}$ este un con cu vîrful în origine și avînd axa de simetrie axa Oz. Din aceasta $x_G = y_G = 0$. Rămîne

$$z_G = \frac{\iiint_K z\,dx\,dy\,dz}{\iiint_K dx\,dy\,dz}.$$

$$I_1 = \iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{C} z\,dz = \frac{1}{2}\iint_D \left[c^2 - c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right] dx\,dy$$

unde $D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.

Cu schimbarea de variabile $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\sin\theta$, $0\leqslant\theta<2\pi$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$, avem

$$I_1 = \frac{abc^2}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-\rho^2)\,\rho\,d\rho = \frac{\pi abc^2}{4}.$$

$$I_2 = \iiint_K dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} dz = c\iint_D \left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right) dx\,dy =$$

$$= abc\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-\rho)\,\rho\,d\rho = \frac{abc}{3}\pi.$$

Avem deci $x_G = y_G = 0$, $z_G = 3\frac{c}{4}$.

Folosind formula lui Gauss-Ostrogradski să se calculeze următoarele integrale de suprafață.

520. $I = \iint_S (x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$

este fața exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

R. $\iint_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy = 3\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$,

unde D este interiorul sferei.

Facem schimbarea: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $0\leqslant r\leqslant a$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ și avem

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^a r^4 dr = \frac{12\,\pi a^5}{5}.$$

521. $I = \iint_S (x-y+z)\,dy\,dz + (y-z+x)\,dz\,dx + (z-x+y)\,dx\,dy$

unde S este fața exterioară suprafeței $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$.

R. Aplicînd formula Gauss-Ostrogradski rezultă $I = 3\iiint_D dx\,dy\,dz$, unde D este domeniul mărginit de suprafața S.

Scanned with OKEN Scanner

Facem schimbarea de variabile

$$u = x - y + z, \quad v = y - z + x, \quad w = z - x + y.$$

Avem $\dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \dfrac{1}{4}\, du\, dv\, dw$, deci

$$I = \frac{3}{4}\iiint_{D'} du\, dv\, dw, \text{ unde } D' \text{ este definit de: } |u| + |v| + |w| \leqslant 1.$$

Din motive de simetrie avem

$$I = 8 \cdot \frac{3}{4}\iiint_{D''} du\, dv\, dw = 6\iint_{D''} du\, dv\, dw, \quad \text{unde}$$

$$D'': \ u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0, \quad w \geqslant 0, \quad u + v + w \leqslant 1,$$

care este un tetraedru de volum $V = \dfrac{1}{6}$.

Rezultă

$$I = \iint_S (x - y + z)\, dy\, dz + (y - z + x)\, dz\, dx + (z - x + y)\, dx\, dy = 1$$

522. Să se calculeze forța de atracție exercitată de un con circular drept de înălțime h avînd unghiul la vîrf α, asupra vîrfului său (fig. 66).

R. Formula generală care ne dă forța newtoniană este

$$\overline{F} = \iiint_D \frac{\mu \bar{r}\, dm}{r^3}.$$

Folosind coordonatele cilindrice $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$, obținem

$$F_z = \mu \iint_D \frac{z\, d\omega}{r^3}, \quad r^2 = \rho^2 + z^2.$$

$$F_z = \mu \int_0^h z\, dz \int_0^{z \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r^3},$$

$$\int_0^{z \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -(\rho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^{z \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{z}\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) = 2\, \frac{1}{z} \sin^2 \frac{\alpha}{4},$$

$$F_z = 4\pi\mu \sin^2 \frac{\alpha}{4} \int_0^h dz = 4\pi h \mu \sin^2 \frac{\alpha}{4},$$

$$F_x = F_y = 0.$$

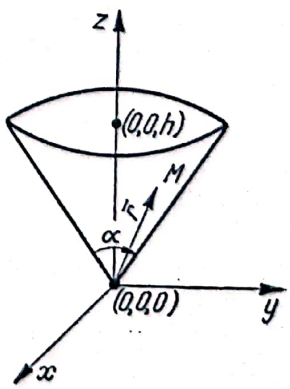

Fig. 66

523. Să se afle momentul de inerţie al unei sfere pline $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, omogene faţă de axa Oz.

R. $I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$.

Trecînd la coordonate sferice avem

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^a r^4\, dr = \frac{2\pi a^5}{5} \int_0^{\pi} \sin\theta(1 - \cos^2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{2\pi a^5}{3}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{8\pi}{15} a^5.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XIV

ECUAȚII DIFERENȚIALE.

524. Să se afle integrala generală a ecuației

$$y' \sin x = y \ln y, \qquad y > 0.$$

și curba integrală care trece prin punctul $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

R. Se separă variabilele

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

sau

$$\frac{d(\ln y)}{\ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

cu soluția generală

$$\ln y = C \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \qquad x \neq (2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Punem condiția ca punctul $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ să fie situat pe curba integrală

$$\ln 1 = C \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$$

care dă $C = 0$, prin urmare soluția particulară este $y = 1$.

525. Să se integreze ecuația

$$y' = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}}.$$

R. Pentru $|x| \leqslant 1$, $|y| < 1$, ecuația se scrie

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - y^2}}.$$

Separăm variabilele

$$\sqrt{1 - y^2}\, dy = \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Integrînd, obținem

$$\arcsin y + y\sqrt{1-y^2} = C + \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}$$

care este integrala generală.

Pentru $|x| \geqslant 1$, $|y| > 1$, ecuația se scrie

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x^2-1}{y^2-1}}$$

sau sub forma

$$\sqrt{y^2-1}\,dy = \sqrt{x^2-1}\,dx$$

care are integrala generală

$$y\sqrt{y^2-1} - \ln|y+\sqrt{y^2-1}| = C + x\sqrt{x^2-1} - \ln|x+\sqrt{x^2-1}|.$$

526. Să se integreze ecuația

$$y' = \frac{y^2+1}{x^2+1}.$$

R. Funcția $\frac{y^2+1}{x^2+1}$ este definită pentru orice $(x, y) \in R^2$.

Separăm variabilele

$$\frac{dy}{y^2+1} = \frac{dx}{x^2+1}$$

deci integrala generală este

$$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x = C.$$

O integrală particulară care trece prin punctul (x_0, y_0) este dată de

$$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} y_0 = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x_0.$$

527. Să se integreze ecuația

$$y' = \frac{y+1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (x, y) \in (1, 1) \times (-1, +\infty).$$

R. În acest interval avem:

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

care are integrala generală

$$\ln(y+1) = \arcsin x + C.$$

Observație. Ecuația dată are și soluția $y = -1$, care se obține din integrala generală pentru $C \to -\infty$.

Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y' - ax^{\alpha}(y^2+1) = 0, \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

R. Pentru $\alpha \neq -1$, avem ecuația

$$\frac{dy}{y^2+1} = ax^{\alpha}\,dx$$

Scanned with OKEN Scanner

care are soluția generală

$$\operatorname{arctg} y = \frac{a}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C$$

sau

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{a}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C\right), \qquad x \neq 0.$$

Pentru $\alpha = -1$, ecuația se scrie

$$y' - \frac{a}{x}(y^2 + 1) = 0$$

sau sub forma

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = a \cdot \frac{dx}{x}$$

cu soluția generală

$$y = \operatorname{tg}(a \ln Cx), \qquad x > 0$$

unde C este o constantă de integrare.

528. Să se găsească integrala ecuației

$$3xyy' = x^2 + y^2$$

care trece prin punctul (1, 1).

R. Ecuația este omogenă. Facem schimbarea de funcție

$$y = xz, \qquad y' = xz' + z.$$

Ecuația se transformă în

$$3z(xz' + z) = 1 + z^2,$$

unde se separă variabilele

$$\frac{3z\,dz}{1 - 2z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Integrala generală este dată de

$$-\frac{3}{4} \ln|1 - 2z^2| = \ln|x| + C$$

sau, revenind la variabilele inițiale,

$$-\frac{3}{4} \ln\left|1 - 2\frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + C.$$

Pentru punctul (1, 1) avem $C = 0$, deci integrala particulară căutată este

$$3 \ln|x^2 - 2y^2| - 2 \ln|x| = 0.$$

529. Să se integreze ecuația

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 9}{3x - 6y + 19}, \qquad (3x - 6y + 19 \neq 0).$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Dreptele

$$(D_1) \quad x - 2y + 9 = 0, \qquad (D_2) \quad 3x - 6y + 19 = 0$$

fiind paralele, putem face schimbarea de funcţie

$$x - 2y = z, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{dz}{dx}\right).$$

Ecuaţia dată devine o ecuaţie cu variabile separabile

$$z + 9 - \frac{3z + 19}{2}\left(1 - \frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Separînd variabilele, obţinem ecuaţia

$$\frac{3z + 19}{z + 1}\,dz = dx, \qquad (z + 1 \neq 0)$$

a cărei integrală generală este

$$8 \ln | x - 2y + 1 | + x - 3y = C.$$

Observaţie. Pentru $z + 1 = 0$, obţinem soluţia

$$x - 2y + 1 = 0$$

care verifică ecuaţia dată. Această soluţie se obţine din integrala generală pentru $C \to -\infty$.

530. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cdot \frac{x - 2y + 1}{5x - y - 4}, \qquad (5x - y - 4 \neq 0).$$

R. Dreptele

$$(D_1) \quad x - 2y + 1 = 0, \qquad (D_2) \quad 5x - y - 4 = 0$$

se intersectează în punctul (1, 1). Efectuăm translaţia

$$x = u + 1, \qquad y = v + 1, \qquad dx = du, \qquad dy = dv, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

şi obţinem atunci ecuaţia omogenă

$$\frac{dv}{du} = -2 \cdot \frac{u - 2v}{5u - 4v}.$$

Făcînd schimbarea de funcţie

$$v = uz(u), \qquad v' = z + uz'$$

obţinem ecuaţia cu variabile separabile

$$u\frac{dz}{du} + z = -2 \cdot \frac{1 - 2z}{5 - z}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Separăm variabilele

$$\frac{5-z}{z^2-z-2}\,dz=\frac{du}{u}.$$

Descompunem în elemente simple

$$\frac{5-z}{z^2-z-2}=\frac{-2}{z+1}+\frac{1}{z-2}.$$

Integrînd, obţinem

$$-2\ln|z+1|+\ln|z-2|=\ln|u|+\ln C.$$

Revenim la variabilele iniţiale $u=x-1$, $z=\frac{y-1}{x-1}$ şi obţinem integrala generală

$$y-2x+1=C(y+x-2)^2.$$

Să găsim acum integrala care trece prin punctul (1, 2). Punînd această condiţie în integrala generală, avem

$$2-2+1=C\,(2+1-2)^2$$

de unde rezultă $C=1$. Deci soluţia căutată este parabola

$$(x+y-2)^2=y-2x+1.$$

531. Să se integreze ecuaţia diferenţială liniară

$$y'+2xy=e^{-x^2},\qquad x\in\mathbf{R}.$$

R. Integrăm mai întîi ecuaţia omogenă

$$y'+2xy=0.$$

Separăm variabilele şi integrăm. Rezultă

$$\frac{dy}{y}=-2x\,dx,\qquad \ln y=-x^2+\ln C,\qquad y=Ce^{-x^2}$$

unde C este o constantă. Pentru integrarea ecuaţiei neomogene folosim metoda variaţiei constantei

$$y=C(x)\,e^{-x^2},\qquad y'=(C'-2xC)\,e^{-x^2}.$$

Înlocuim în ecuaţia dată şi efectuăm calculele. Obţinem

$$C'e^{-x^2}-2x\,e^{-x^2}\,C+2x\,e^{-x^2}\,C=e^{-x^2},\qquad C'=1,\qquad C(x)=x+K$$

unde K este o constantă de integrare. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este, prin urmare,

$$y=(x+K)e^{-x^2},\qquad x\in\mathbf{R}.$$

532. Să se integreze ecuaţia liniară

$$xy'+y-x^2\sin x=0,\qquad x\neq 0.$$

R. Ecuația omogenă asociată este

$$xy' + y = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

care ne dă prin integrare

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C, \quad y = \frac{C}{x}.$$

Pentru a integra ecuația neomogenă, folosim metoda variației constantei. Avem:

$$y = \frac{C(x)}{x}, \qquad y' = -\frac{C}{x^2} + \frac{C'}{x}.$$

Înlocuind în ecuația dată și efectuînd calculele, rezultă

$$-\frac{C}{x^2} + \frac{1}{x}C' + \frac{C}{x^2} - x\sin x = 0, \qquad C' = x^2 \sin x.$$

Integrăm și avem

$$C(x) = \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + K$$

unde K este o constantă de integrare. Prin urmare, soluția generală este

$$y = \frac{1}{x}(2\cos x + 2x\sin x - x^2\cos x + K), \qquad x \neq 0.$$

533. Să se integreze ecuația Bernoulli

$$\sqrt{x^3}y' - \sqrt{x}y + y^2 = 0, \qquad x > 0$$

și să se determine soluția prticulară care trece prin punctul $A(1, 2)$.

R. Împărțim cu $\sqrt{x^3}$ ecuația dată

$$y' - \frac{1}{x}y + \frac{1}{\sqrt{x^3}}y^2 = 0.$$

Facem substituția

$$\frac{1}{y} = z, \qquad -\frac{y'}{y^2} = z'$$

și ecuația se transformă în ecuația liniară

$$z' + \frac{1}{x}z - \frac{1}{\sqrt{x^3}} = 0$$

care are soluția generală

$$z = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(C + \int \frac{1}{\sqrt{x^3}} e^{\int \frac{1}{x}dx} \, dx\right) = \frac{1}{x}\left(C + \int \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) = \frac{C}{x} + 2\sqrt{x}.$$

Soluția generală a ecuației date este așadar

$$y = \frac{x}{C + 2\sqrt{x}}, \qquad x > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a determina soluția particulară cerută, punem condiția ca soluția generală să treacă prin punctul dat și determinăm constanta C

$$2 = \frac{1}{C+2}, \qquad C = -\frac{3}{2}$$

Soluția particulară căutată este deci

$$y = \frac{2x}{4\sqrt{x} - 3}, \qquad x > \frac{9}{16}$$

534. Să se integreze ecuația Riccati

$$xy' + y^2 - 4y + 3 = 0$$

știind că are soluția particulară $y_0 = 1$.

R. Facem substituția

$$y = 1 + \frac{1}{z}, \qquad y' = -\frac{z'}{z^2}$$

și ecuația se transformă în ecuația liniară

$$-\frac{x}{z^2} \cdot z' + \left(1 + \frac{1}{z}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{1}{z}\right) + 3 = 0, \qquad z' + \frac{2}{x} z - \frac{1}{x} = 0$$

care are soluția generală

$$z = e^{-\int \frac{2}{x} dx}\left(C + \int \frac{1}{x} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx\right) = \frac{1}{x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right)$$

Soluția generală a ecuației date este deci

$$y = 1 + \frac{2x^2}{x^2 + 2C}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Să găsim soluția particulară care trece prin punctul (1, 2). Avem

$$2 = 1 + \frac{2}{2C + 1}, \qquad C = \frac{1}{2}$$

astfel încît soluția căutată este

$$y = 1 + \frac{2x^2}{x^2 + 1}, \qquad x \in \mathbf{R}$$

535. Să se rezolve ecuația diferențială

$$yy'^2 - (1 + 2xy)\, y' + 2x = 0.$$

R. Este o ecuație algebrică de gradul doi în y'. Rezolvată în raport cu y', ne dă următoarele două ecuații diferențiale

$$y' = \frac{1}{y}, \qquad y' = 2x$$

care au soluțiile respective

$$y^2 = 2x + C, \qquad y = x^2 + K$$

Este ușor de arătat că fiecare din aceste soluții verifică ecuația dată.

Scanned with OKEN Scanner

536. Să se integreze ecuația diferențială

$$y = y'^2 + \ln y', \qquad y' > 0$$

R. Este o ecuație diferențială de forma

$$y = f(y')$$

Dacă punem $y' = p$, atunci obținem

$$y = p^2 + \ln p, \qquad \mathrm{d}y = \left(2p + \frac{1}{p}\right)\mathrm{d}p$$

Din $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ rezultă succesiv

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{p}\left(2p + \frac{1}{p}\right)\mathrm{d}p = \left(2 + \frac{1}{p^2}\right)\mathrm{d}p$$

Integrînd, avem

$$x = \int \left(2 + \frac{1}{p^2}\right)\mathrm{d}p = 2p - \frac{1}{p} + C$$

Reprezentarea parametrică a curbelor integrale este deci

$$(\Gamma)\begin{cases} x = 2p - \dfrac{1}{p} + C \\ y = p^2 + \ln p \end{cases} \qquad p > 0$$

537. Să se afle integrala generală a ecuației diferențiale

$$y^2 + y'^2 = 1$$

R. Este o ecuație de forma

$$\mathrm{F}(y, y') = 0$$

Dacă punem

$$y = \sin t, \qquad y' = \cos t, \qquad t \in \mathbf{R}$$

atunci obținem succesiv

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos t, \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\cos t} = \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \mathrm{d}t$$

de unde rezultă prin integrare

$$x = t + C$$

Integrala generală sub formă parametrică este

$$\begin{cases} x = t + C, \\ y = \sin t, \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}$$

Eliminînd parametrul t, obținem soluția generală sub forma

$$y = \sin(x - C)$$

Scanned with OKEN Scanner

538. Să se integreze ecuația diferențială

$$x = y' + e^{y'}$$

R. Este o ecuație de forma

$$x = f(y')$$

Dacă punem $y' = p$, atunci obținem imediat

$$x = p + e^p, \qquad dx = (1 + e^p)\, dp$$

Din $p = \frac{dy}{dx}$ rezultă succesiv

$$dy = p\, dx = p(1 + e^p)\, dp$$

Integrînd, avem

$$y = \int (p + pe^p)\, dp = \frac{1}{2} p^2 + (p - 1)\, e^p + C$$

Sub formă parametrică avem deci integrala generală a ecuației date

$$\begin{cases} x = p + e^p \\ y = \frac{1}{2} p^2 + (p - 1)\, e^p + C \end{cases}, \qquad p \in \mathbf{R}$$

539. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$$

R. Ecuația dată este de forma

$$F(x, y') = 0$$

Dacă punem $y' = xt$, obținem

$$x = \frac{3t}{1 + t^3}, \qquad y' = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

Deoarece $dy = y'\, dx$, avem succesiv

$$dy = \frac{3t^2}{1 + t^3} dx = \frac{3t^2}{1 + t^3} \cdot \frac{3(1 + t^3) - 9t^3}{(1 + t^3)^2} dt = 9 \cdot \frac{(1 - 2t^3)\, t^2}{(1 + t^3)^3} dt$$

de unde rezultă prin integrare

$$y = 9 \int \frac{1 - t^3}{(1 + t^3)^3} t^2\, dt = 9 \int \frac{d(t^3 + 1)}{(t^3 + 1)^3} - 6 \int \frac{d(t^3 + 1)}{(t^3 + 1)^2} = -$$

$$= -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{(t^3 + 1)^2} + 6 \cdot \frac{1}{t^3 + 1} + C$$

Soluția generală a ecuației date este sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1 + t^3} \\ y = -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{(t^3 + 1)^2} + 6 \cdot \frac{1}{t^3 + 1} + C \end{cases} \qquad (t \neq -1)$$

Scanned with OKEN Scanner

540. Să se integreze ecuația Lagrange

$$y = xy'^2 + y'^3$$

R. Notăm $y' = p$, deci $y = xp^2 + p^3$. Derivăm în raport cu x

$$p = 2xp\frac{dp}{dx} + p^2 + 3p^2\frac{dp}{dx}$$

și obținem ecuația liniară

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2p}{p^3 - p}x + \frac{3p^2}{p^2 - p} = 0, \quad (p^2 - p \neq 0)$$

care ne dă prin integrare

$$x = e^{-\int\frac{2}{p-1}dp}\left(C - \int\frac{2p^2}{p^2 - p}e^{\int\frac{2}{p-1}dp}\,dp\right)$$

Efectuînd calculele, obținem soluția generală sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{(p-1)^2}\left(C - \dfrac{2}{3}p^3 + p^2\right) \\ y = \dfrac{p^2}{(p-1)^2}\left(C - \dfrac{2}{3}p^3 + p^2\right) + p^3 \end{cases}$$

Observație. Dacă $p^2 - p = 0$, avem două cazuri și anume:

I). $p = 0$. În acest caz obținem integrala singulară $y = 0$

II). $p \to 1$. În acest caz distingem două subcazuri și anume:

II_1). $C \neq -\frac{1}{3}$. Avem $|x| \to \infty$, iar dreapta $y = x + 1$ este, ceea ce se numește, direcția asimptotică a curbelor integrale.

II_2). $C = -\frac{1}{3}$. Curba integrală se descompune în dreapta $y = x + 1$ și o conică.

541. Să se integreze ecuația Clairaut

$$y = xy' + \frac{1}{y'}$$

R. Punem $y' = p$ și deci $y = xp + \frac{1}{p}$. Derivăm în raport cu x

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

Efectuînd calculele, avem

$$\left(x - \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

Se prezintă următoarele două cazuri:

I). $\frac{dp}{dx} = 0$, deci $p = C$. În acest caz, obținem soluția generală

$$y = CX + \frac{1}{C}$$

care reprezintă o familie de drepte.

Scanned with OKEN Scanner

II. $x = \frac{1}{p^2}$. Obținem integrala singulară sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2} \\ y = \frac{2}{p} \end{cases}$$

Eliminînd parametrul p, rezultă că integrala singulară are ecuația carteziană

$$y^2 = 4x$$

care reprezintă o parabolă ce trece prin originea axelor de coordonate.

Observație. Dacă eliminăm parametrul C, între ecuația $y = Cx + \frac{1}{C}$ și derivata sa în raport cu C, adică

$$0 = x - \frac{1}{C^2}$$

obținem parabola de mai sus. Acest fapt se exprimă spunînd că integrala singulară (parabola) este înfășurătoarea familiei de drepte reprezentate de soluția generală.

542. Să se găsească curba cu proprietatea că axele de coordonate determină pe tangentă un segment de lungime constantă a.

R. Ecuația tangentei la curbă $y = f(x)$, în punctul (x, y) este

$$Y - y = y'(X - x)$$

și taie axele de coordonate OX, OY respectiv în punctele $(x - \frac{y}{y'}, 0)$, $(0, \quad y - xy')$.

Proprietatea geometrică enunțată ne conduce la ecuația diferențială

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2 = a^2$$

care se mai poate scrie sub forma

$$y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

și care este o ecuație Clairaut. Integrala generală este familia de drepte

$$y = Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}$$

Integrala singulară are ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = \mp a(1 + p^2)^{-\frac{3}{2}} \\ y = \pm ap^3(1 + p^2)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

543. Să se integreze ecuația diferențială

$$(y^2 - x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

R. Este o ecuație cu diferențiale totale exacte, deoarece notînd

$$P(x, y) = y^2 - x^2, \qquad Q(x, y) = 2xy$$

avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

Integrala generală este dată de formula

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt = C, \qquad (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$$

Aplicăm această formulă cu $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, pentru a avea calcule mai simple. Avem

$$-\int_0^x t^2\,dt + \int_0^y 2xt\,dt = C$$

de unde rezultă prin integrare

$$xy^2 - \frac{x^3}{3} = C, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

544. Să se rezolve ecuația diferențială

$$\frac{y}{x+y}\,dx + \left[\frac{y}{x+y} + \ln(x+y)\right]dy = 0, \qquad x + y > 0$$

și să se afle apoi curba integrală care trece prin punctul (1, 1).

R. Avem

$$P(x, y) = \frac{y}{x+y}, \qquad Q(x, y) = \frac{y}{x+y} + \ln(x+y), \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x}{(x+y)^2}$$

Integrala generală pentru $x + y > 0$ este dată de

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y_0}{t + y_0}\,dt + \int_{y_0}^{y}\left[\frac{t}{x+t} + \ln(x+t)\right]dt = C$$

Efectuînd calculele, rezultă

$$y_0 \ln(t + y_0)\Big|_{x_0}^{x} + t\ln(t+x)\Big|_{y_0}^{y} = C$$

sau, în sfîrșit,

$$y\ln(x+y) = K, \qquad x + y > 0.$$

Pentru a determina curba integrală care trece prin punctul (1, 1), înlocuim $x = 1$, $y = 1$ în integrala generală și aflăm constanta K.

Rezultă imediat $K = \ln 2$, deci curba integrală căutată este

$$y\ln(x+y) = \ln 2.$$

545. Să se integreze ecuația diferențială

$$(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$$

știind că admite un factor integrant funcție numai de y.

R. Trebuie să avem

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(1 - xy^2)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(xy^2 - y^3)\right], \qquad \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0\right)$$

de unde rezultă

$$-y^2\mu = \mu(2xy - 3y^2) + \frac{d\mu}{dy}(xy^2 - y^3)$$

Efectuînd calculele, găsim ecuația diferențială

$$\frac{d\mu}{\mu} = -2\frac{dy}{y}$$

Una dintre soluțiile acestei ecuații este

$$\mu(y) = \frac{1}{y^2}$$

Înmulțim ecuația dată cu $\frac{1}{y^2}$ și obținem ecuația

$$(x - y)\,dx + \left(\frac{1}{y^2} - x\right)dy = 0$$

care este o diferențială totală exactă. Integrala generală este dată de

$$\int_{x_0}^{x}(t - y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{t^2} - x\right)dt = C$$

sau, făcînd calculele,

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{y} - xy = C$$

într-un domeniu $D \subset \mathbf{R}^3$ care nu intersectează dreapta $y = 0$.

Observație. Pentru $C \to \infty$, obținem $y = 0$, care este o soluție a ecuației date.

546. Să se integreze ecuația diferențială

$$(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

știind că admite un factor integrant funcție numai de x.

R. Avem

$$\frac{\partial}{\partial x}(2y\mu) = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x^2 + y^2 + 2x)\mu\right], \qquad \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0\right)$$

de unde rezultă ecuația cu variabile separate

$$\frac{d\mu}{\mu} = dx$$

una dintre soluțiile sale fiind

$$\mu(x) = e^x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind ecuația dată cu e^x, obținem ecuația cu diferențiale totale exacte

$$e^x(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,e^x\,dy = 0, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

a cărei integrală generală este

$$\int_0^x (t^2 + 2t)\,e^t\,dt + e^x \int_0^y 2t\,dt = C$$

sau, efectuînd calculele

$$(x^2 + y^2)\,e^x = C$$

Să se găsească acum integrala particulară care trece prin punctul (0, 1). Această condiție ne dă $C = 1$, deci soluția căutată este

$$(x^2 + y^2)\,e^x = 1.$$

547. Să se găsească traiectoriile izogonale ale familiei de drepte

$$y = Cx, \qquad x \in \mathbf{R}$$

R. Ecuația diferențială a familiei de drepte date se obține eliminînd pe C între ecuația de mai sus și derivata sa în raport cu x, deci

$$y' = C$$

Făcînd eliminarea, obținem ecuația diferențială

$$y' = \frac{y}{x}$$

Ecuația diferențială a curbelor izogonale se obține înlocuind pe y' cu $\dfrac{y' - m}{1 + my'}$ în ecuația diferențială a familiei date. Avem deci

$$\frac{y' - m}{1 + my'} = \frac{y}{x} \text{ sau } y' = \frac{m + \dfrac{y}{x}}{1 - m\dfrac{y}{x}}$$

unde m este o constantă dată. Această ecuație fiind omogenă, substituim

$$y = xz(x), \qquad y' = z + xz'$$

și se obține ecuația cu variabile separate

$$\frac{1 - mz}{1 + z^2}\,dz = m\,\frac{dx}{x}$$

care are integrala generală

$$\frac{1}{m}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2} - \ln K$$

unde K este o constantă de integrare.

Trecînd la coordonate polare în plan

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem în sfîrșit

$$\rho = K e^{\frac{\theta}{m}}, \qquad \theta \in \mathbf{R}$$

care este ecuația unei familii de spirale logaritmice.

548. Să se determine traiectoriile izogonale ale familiei de parabole

$$x^2 - 2y - x = C$$

R. Eliminăm constanta C între această ecuație și derivata sa în raport cu x

$$2x - 2y' - 1 = 0$$

și obținem ecuația diferențială a familiei date

$$y' = \frac{2x - 1}{2}$$

Ecuația diferențială a traiectoriilor izogonale se obține înlocuind în ecuația diferențială a familiei de parabole pe y' cu $\frac{y' - m}{1 + my'}$. În cazul nostru

$$\frac{y' - m}{1 + my'} = \frac{2x - 1}{2}$$

de unde rezultă

$$y' = \frac{2x + 2m - 1}{-2mx + m + 2}$$

cu soluția

$$y = \frac{1}{2m^2}\left[-2mx + m + 2 - 2(1 + m^2)\ln(-2mx + m + 2)\right] + C,$$

$$(2mx - m - 2 < 0)$$

549. Să se determine traiectoriile izogonale ale familiei de curbe

$$y - x^2 = a^2$$

R. Ecuația diferențială a familiei este

$$y' = 2x$$

iar ecuația diferențială a traiectoriilor izogonale este

$$\frac{y' - m}{1 + my'} = 2x$$

sau

$$y' = \frac{1}{m} \cdot \frac{m^2 + 1}{1 - 2mx} - \frac{1}{m}$$

cu soluția

$$y = -\frac{m^2 + 1}{2m^2}\ln|2mx - 1| - \frac{1}{m} \cdot x + C$$

Scanned with OKEN Scanner

550. Să se găsească traiectoriile ortogonale ale familiei de hiperbole echilaterale

$$x^2 - y^2 = C$$

R. Ecuația diferențială a familiei date este

$$x - yy' = 0.$$

Ecuația diferențială a traiectoriilor ortogonale se obține înlocuind pe y' cu $-\frac{1}{y'}$ în ecuația diferențială a familiei, deci

$$x + \frac{y}{y'} = 0$$

Separînd variabilele, rezultă ecuația

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

care ne dă prin integrare

$$xy = K$$

Traiectoriile ortogonale sînt deci tot hiperbole echilatere, avînd însă asimptote axele de coordonate.

551. Să se găsesc traiectoriile ortogonale ale familiei de cercuri

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + C = 0$$

R. Ecuația diferențială a familiei date este

$$x + yy' + 1 + 2y' = 0$$

iar ecuația traiectoriilor ortogonale este

$$x - \frac{y}{y'} + 1 - \frac{2}{y'} = 0$$

sau

$$y = xy' + y' - 2$$

care este o ecuație Clairaut. Punem $y' = p$ și avem

$$y = xp + p - 2$$

Derivăm în raport cu x

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}$$

Efectuăm calculele

$$\frac{dp}{dx}(x + 1) = 0$$

și rezultă astfel soluția generală

$$y + 2 = K(x + 1)$$

care reprezintă o familie de drepte ce trec prin punctul $(-1, -2)$, adică prin centrul cercurilor familiei date.

Scanned with OKEN Scanner

552. Să se determine traiectoriile ortogonale ale familiei de curbe

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

R. Logaritmînd, obținem

$$2\ln(x^2 + y^2) - \ln(x^2 - y^2) = \ln 2a^2, \qquad (x^2 - y^2 > 0).$$

Derivînd în raport cu x, avem

$$(3x^2 - y^2)\, yy' + (x^2 - 3y^2)\, x = 0$$

care este ecuația diferențială a familiei date.

Înlocuind pe y' cu $-\frac{1}{y'}$, obținem ecuația omogenă

$$xy'(x^2 - 3y^2) - y(3x^2 - y^2) = 0$$

care este ecuația diferențială a traiectoriilor ortogonale.

Integrăm și obținem soluția

$$(x^2 + y^2)^2 = K\, xy$$

553. Să se determine intensitatea curentului într-un circuit după t secunde de la închiderea circuitului, dacă tensiunea V este constantă și intensitatea curentului la momentul $t = 0$ era I_0. Notînd cu R rezistența și cu L coeficientul de inducție proprie, intensitatea satisface ecuația diferențială liniară neomogenă

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V$$

Considerînd $V = V_0 \sin 2\pi nt$ și $I_0 = -\frac{2\pi n\, V_0 L}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}$, să se determine soția în acest caz.

R. Ecuația omogenă asociată

$$L\frac{dI}{dt} + RI = 0$$

are soluția

$$I = C\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

care, introdusă în ecuația neomogenă, pentru $C = C(t)$ ne dă

$$C' = \frac{V}{L} e^{\frac{R}{L}t}$$

cu soluția

$$C(t) = \frac{V}{R} e^{\frac{R}{L}t} + K$$

Soluția generală a ecuației neomogene este

$$I = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $t = 0$, avem $I = I_0$, deci

$$K = I_0 - \frac{V}{R}$$

Deci intensitatea curentului este

$$I = \left(I_0 - \frac{V}{R}\right) e^{\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}$$

Pentru $V = V_0 \sin 2\pi nt$ și $I_0 = -\frac{2\pi n V_0 L}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}$ vom determina soluția ecuației

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V_0 \sin 2\pi nt$$

Ecuația omogenă are soluția determinată mai sus. Din ecuația neomogenă, avem

$$C' = \frac{V_0}{L} \sin 2\pi nt \; e^{\frac{R}{L}t}$$

cu soluția

$$C = \frac{V_0 L}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}\left(\frac{R}{L}\sin 2\pi nt - 2\pi n \cos 2\pi nt\right) e^{\frac{R}{L}t} + K$$

Soluția generală a ecuației neomogene este

$$I = K e^{\frac{R}{L}t} + \frac{V_0 L}{4\pi^2 n^2 L^2 + R^2}\left(\frac{R}{L}\sin 2\pi nt - 2\pi n \cos 2\pi nt\right)$$

Pentru $t = 0$ și I_0 dat se obține $K = 0$. Deci, soluția căutată este

$$I = \frac{V_0}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}(R \sin 2\pi nt - 2\pi nL \cos 2\pi nt)$$

554. Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$y''' = 0$$

care satisface condițiile inițiale

$$y(1) = 1, \qquad y'(1) = 0, \qquad y''(1) = -1$$

R. Soluția generală a ecuației date este

$$y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2, \qquad x \in \mathbf{R}$$

Avem de asemenea

$$y'(x) = C_1 + 2C_2 x, \quad y''(x) = 2C_2$$

de unde rezultă sistemul de ecuații liniare neomogene (algebrice)

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = 0 \\ 2C_2 = -1 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

care are soluția

$$C_0 = \frac{1}{2}, \qquad C_1 = 1, \qquad C_2 = -\frac{1}{2}$$

Soluția particulară care satisface condițiile inițiale date este așadar

$$y_0(x) = \frac{1}{2}(1 + 2x - x^2), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

555. Să se găsească soluția ecuației diferențiale

$$y''' = \cos x, \qquad x \in \mathbf{R}$$

care satisface condițiile inițiale

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2, \qquad y''(0) = -1$$

R. Integrînd succesiv, avem

$$y'' = \sin x + C_0$$

$$y' = -\cos x + C_0 x + C_1$$

$$y = -\sin x + \frac{1}{2} C_0 x^2 + C_1 x + C_2, \qquad x \in \mathbf{R}$$

Am obținut soluția generală. Soluția particulară $y_0(x)$ căutată se obține determinînd constantele C_0, C_1, C_2 din condițiile inițiale, avem

$$C_2 = 1, \qquad -1 + C_1 = 2, \qquad C_0 = -1$$

deci $C_0 = -1$, $C_1 = 3$, $C_2 = 1$, astfel încît obținem

$$y_0(x) = -\sin x - \frac{1}{2} x^2 + 3x + 1, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

556. Să se găsească soluția ecuației diferențiale

$$xy^{IV} - y''' = 2x^3$$

care satisface condițiile inițiale

$$y(1) = 1, \qquad y'(1) = 1, \qquad y''(1) = 0, \qquad y'''(1) = 0$$

R. Determinăm mai întîi soluția generală. Dacă punem

$$y''' = z$$

obținem ecuația liniară în z

$$xz' - z = 2x^3$$

care are soluția generală

$$z(x) = C_0 x + x^3$$

Revenind la funcția necunoscută y, obținem ecuația diferențială de ordinul trei

$$y''' = C_0 x + x^3$$

Scanned with OKEN Scanner

Integrînd succesiv, avem

$$y'' = \frac{1}{2} C_0 x^2 + \frac{1}{4} x^4 + C_1$$

$$y' = \frac{1}{6} C_0 x^3 + \frac{1}{20} x^5 + C_1 x + C_2$$

$$y = \frac{1}{24} C_0 x^4 + \frac{1}{120} x^6 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \qquad x \in \mathbf{R}$$

care este soluția generală a ecuației din enunț. Condițiile inițiale ne dau

$$\begin{cases} C_0 + 1 = 0 \\ \frac{1}{2} C_0 + \frac{1}{4} + C_1 = 0 \\ \frac{1}{6} C_0 + \frac{1}{20} + C_1 + C_2 = 1 \\ \frac{1}{24} C_0 + \frac{1}{120} + \frac{1}{2} C_1 + C_2 + C_3 = 1 \end{cases}$$

Acest sistem are soluția

$$C_0 = -1, \qquad C_1 = \frac{1}{4}, \qquad C_2 = \frac{13}{15}, \qquad C_3 = \frac{1}{20}$$

prin urmare soluția care îndeplinește condițiile inițiale este

$$y(x) = \frac{1}{120} x^6 - \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{8} x^2 + \frac{13}{15} x + \frac{1}{20}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

557. Să se integreze ecuația

$$yy'' + y'^2 + y^2 = 0.$$

R. Dacă punem

$$y' = p$$

unde p este considerat funcție de y, atunci obținem

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

Ecuația dată se scrie

$$yp \frac{dp}{dy} + p^2 + y^2 = 0$$

sau sub forma

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{y^2 + p^2}{yp}$$

care este o ecuație omogenă de ordinul întîi.

Scanned with OKEN Scanner

Facem substituția

$$p = yz(y), \qquad \frac{dp}{dy} = z + y\frac{dz}{dy}$$

și ecuația omogenă se transformă în ecuația cu variabile separate

$$\frac{dy}{y} = -\frac{z\,dz}{1+2z^2}$$

care are soluția generală

$$y^4 = \frac{C_0}{1+2z^2}$$

Revenind la funcția p, obținem

$$y^2 = \frac{|C_0|}{y^2+2p^2}$$

de unde rezultă

$$p^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{|C_0| - y^4}{y^2}$$

sau, în sfîrșit

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{|C_0| - y^4}}{y}$$

Separăm variabilele

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{|C_0| - y^4}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,dx$$

Această ecuație are integrala generală

$$\pm\sqrt{2}\,x + C_1 = \arcsin\frac{y^2}{\sqrt{|C_0|}}$$

558. Să se integreze ecuația diferențială

$$xy'' - (x+1)\,y' + y = 0.$$

R. Derivăm în raport cu x și obținem

$$xy''' + y'' - (x+1)\,y'' - y' + y' = 0$$

Efectuăm calculele

$$y''' - y'' = 0.$$

Notăm $y'' = z$ și rezultă ecuația

$$z' - z = 0$$

care este o ecuație cu variabile separabile, avînd soluția generală

$$z = C_0\,e^x$$

Înlocuim $z = y''$ și obținem ecuația

$$y'' = C_0\,e^x$$

Scanned with OKEN Scanner

pe care o integrăm succesiv

$$y' = C_0 e^x + C_1$$
$$y = C_0 e^x + C_1 x + C_2.$$

Punem condiția ca funcția obținută să verifice ecuația dată

$$xC_0 e^x - (x+1)(C_0 e^x + C_1) + C_0 e^x + C_1 x + C_2 \equiv 0$$

Identificînd, obținem $C_2 = C_1$, prin urmare soluția generală a ecuației din enunț este

$$y = C_0 e^x + C_1(x+1), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

559. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' + xy' + y = 0.$$

R. Observăm că ecuația se mai scrie

$$\frac{d}{dx}(y' + xy) = 0$$

de unde rezultă ecuația diferențială liniară de ordinul întîi

$$y' + xy = C_0$$

Integrînd-o, obținem

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C_1 + C_0 \int e^{\frac{x^2}{2}} dx\right)$$

care reprezintă soluția generală a ecuației date.

560. Să se afle integrala generală a ecuației

$$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2) y' + y = 0.$$

R. Făcînd substituția $x = \operatorname{tg} t$, obținem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \cos^2 t \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dy}} = \cos^2 t \cdot \frac{d}{dt}\left(\cos^2 t \cdot \frac{dy}{dt}\right) = \cos^4 t \frac{d^2y}{dt^2} - 2 \sin t \cos^3 t \frac{dy}{dt}$$

Ecuația se mai scrie

$$(1+\operatorname{tg}^2 t)^2 (\cos^4 t \cdot \ddot{y} - 2 \sin t \cos^3 t \cdot \dot{y}) + 2 \operatorname{tg} t (1+\operatorname{tg}^2 t) \cos^2 t \cdot \dot{y} + y = 0$$

unde am notat

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, \qquad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectuînd calculele, rezultă ecuația

$$\ddot{y} + y = 0$$

pe care o înmulțim cu $2y$ și avem

$$2y\ddot{y} + 2yy = 0$$

Această ecuație se mai scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{y}^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y^2) = 0$$

de unde obținem prin integrare

$$\dot{y}^2 + y^2 = C_0^2$$

Să considerăm reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} y = C_0 \sin p \\ \dot{y} = C_0 \cos p \end{cases}, \qquad p \in \mathbf{R}$$

Rezultă astfel succesiv

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = C_0 \cos p, \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}y}{C_0 \cos p} = \frac{C_0 \cos p \, \mathrm{d}p}{C_0 \cos p} = \mathrm{d}p$$

de unde deduce, $p = t + C_1$. Avem astfel

$$y = C_0 \sin(t + C_1)$$

Integrala generală, sub formă parametrică, a ecuației date este așadar

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = C_0 \sin(t + C_1) \end{cases} \qquad t \neq (2K+1)\frac{\pi}{2}, \qquad K \in \mathbf{Z}$$

561. Să se arate că funcțiile

$$f_1(x) = \sin^2 x, \qquad f_2(x) = \cos^2 x, \qquad f_3(x) = \cos 2x, \qquad x \in \mathbf{R}$$

sînt liniar dependente pe R.

R. Deoarece avem identitatea trigonometrică

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad x \in \mathbf{R}$$

înseamnă că putem scrie

$$f_1(x) - f_2(x) + f_3(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}$$

adică funcțiile f_1, f_2, f_3 sînt liniar dependente pe $\mathbf{R}$.

562. Să se arate că funcțiile

$$f_k(x) = x^k, \qquad x \in \mathbf{R}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

sînt liniar independente pe $\mathbf{R}$.

R. Trebuie să arătăm că relația

$$\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}$$

implică $\lambda_0 = 0, \ \lambda_1 = 0, \ldots, \ \lambda_n = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceasta dăm lui x valorile

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\quad (x_i \neq x_j,\quad i \neq j,\quad i, j = 0, 1, \ldots, n).$$

Obținem sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} \lambda_0 + x_0\lambda_1 + x_0^2\lambda_2 + \ldots + x_0^n\lambda_n = 0 \\ \lambda_0 + x_1\lambda_1 + x_1^2\lambda_2 + \ldots + x_1^n\lambda_n = 0 \\ \lambda_0 + x_2\lambda_1 + x_2^2\lambda_2 + \ldots + x_2^n\lambda_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_0 + x_n\lambda_1 + x_n^2\lambda_2 + \ldots + x_n^n\lambda_n = 0 \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem este determinantul Van der Monde

$$V_{n+1}(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots x_n^n \end{vmatrix}$$

care este diferit de zero, deci sistemul de ecuații liniare omogene de mai sus admite numai soluția banală, adică avem

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

ceea ce trebuie demonstrat.

563. Să se calculeze wronskianul funcțiilor

$$f_1(x) = 1, \qquad f_2(x) = \sin^2 x, \qquad f_3(x) = \cos^2 x, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

R. Conform definiției, avem succesiv

$$W(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 0 & 2\sin x\cos x & -2\sin x\cos x \\ 0 & 2\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix} = 0, \quad x \in R.$$

564. Să se arate că funcțiile $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^x$ sînt soluții particulare ale ecuației diferențiale liniare

$$y'' - y = 0$$

și că ele formează un sistem fundamental pe $\mathbf{R}$.

R. Avem

$$y_1' = -e^{-x}, \qquad y_1'' = e^{-x}, \qquad y_1'' - y_1 = e^{-x} - e^{-x} = 0$$
$$y_2' = e^x, \qquad y_2'' = e^x, \qquad y_2'' - y_2 = e^x - e^x = 0,$$

deci y_1, y_2 sînt soluții particulare ale ecuației date.

Scanned with OKEN Scanner

Calculăm acum wronskianul funcțiilor y_1, y_2. Avem

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} \\ -e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix} = 2, \qquad x \in \mathbf{R}$$

și deoarece este neidentic nul pe $\mathbf{R}$, înseamnă că funcțiile y_1, y_2 formează un sistem fundamental de soluții ale ecuației date.

Soluția generală a ecuației din enunț este prin urmare

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}, \qquad x \in \mathbf{R}$$

unde c_1, c_2 sînt constante arbitrare.

565. Să se arate că funcțiile $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, sînt soluții particulare ale ecuației

$$y'' + y = 0$$

și să se scrie soluția generală a acestei ecuații.

R. Avem

$$y_1' = \cos x, \qquad y_1'' = -\sin x, \qquad y_1'' + y_1 = -\sin x + \sin x = 0$$

$$y_2' = -\sin x, \qquad y_2'' = -\cos x, \qquad y_2'' + y_2 = -\cos x + \cos x = 0$$

deci y_1, y_2 sînt soluții particulare ale ecuației date.

Să arătăm acum că y_1, y_2 formează un sistem fundamental de soluții. Pentru aceasta calculăm wronskianul acestor funcții și vedem dacă el este neidentic nul pe $\mathbf{R}$. Avem astfel

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1, \qquad x \in \mathbf{R}$$

Soluția generală a ecuației date este așadar

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \sin x + c_2 \cos x, \qquad x \in \mathbf{R}$$

unde c_1, c_2 sînt constante oarecare.

566. Să se arate că wronskianul funcțiilor

$$y_1 = x, \qquad y_2 = x + 1, \qquad x \in \mathbf{R}$$

nu este identic nul pe $\mathbf{R}$ și să se construiască ecuația diferențială liniară omogenă de ordinul doi avînd pe y_1, y_2 drept sistem fundamental de soluții.

Avem

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad x \in \mathbf{R}$$

Ecuația căutată este de forma

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \end{vmatrix} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

sau înlocuind pe y_1, y_2

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x & 1 & 0 \\ x+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Efectuăm calculele și obținem în definitiv ecuația cerută

$$y'' = 0$$

567. Să se arate că funcțiile $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$ sînt soluții particulare ale ecuației

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$$

și să se găsească soluția particulară care satisface condițiile inițiale

$$y(1) = 0, \qquad y'(1) = 0, \qquad y''(1) = -1$$

R. Avem

$$y_1' = 1, \quad y_1'' = y_1''' = 0, \quad x^3y_1''' - 3x^2y_1'' + 6xy_1' - 6y_1 = 6x - 6x = 0$$

$$y_2' = 2x, \quad y_2'' = 2, \quad y_2''' = 0, \quad x^3y_2''' - 3x^2y_2'' + 6xy_2' - 6y_2 =$$
$$= -6x^2 + 12x^2 - 6x^2 = 0$$

$$y_3' = 3x^2, \quad y_3'' = 6x, \quad y_3''' = 6, \quad x^3y_3''' - 3x^2y_3''' + 6xy_3' - 6y_3 =$$
$$= 6x^3 - 18x^3 + 18x^3 - 6x^3 = 0$$

deci y_1, y_2, y_3 sînt soluții particulare ale ecuației date.

Calculăm acum wronskianul lor

$$W(x_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3 \not\equiv 0$$

Deci y_1, y_2, y_3 formează un sistem fundamental de soluții pe orice interval care nu conține originea. Soluția generală a ecuației date este

$$y = c_1x + C_2x^2 + c_3x^3$$

pe orice interval $[a, b]$ care nu conține punctul $x = 0$. Rezultă de aici

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3cx^2$$
$$y'' = 2c_2 + 6c_3x^2$$

Condițiile inițiale (problema lui Cauchy) ne conduc la sistemul liniar

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ \quad 2c_2 + 6c_3 = -1 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

care are soluția

$$c_1 = -\frac{1}{2}, \qquad c_2 = 1, \qquad c_3 = -\frac{1}{2}$$

Soluția particulară cerută este prin urmare

$$y(x) = -\frac{1}{2}x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$$

568. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y^{IV} + y''' + 5y'' + 4y' + 4y = 0$$

R. Ecuația caracteristică este

$$r^4 + r^3 + 5r^2 + 4r + 4 = (r^2 + 4)(r^2 + r + 1) = 0$$

și are rădăcinile complexe distincte

$$r_1 = 2\mathrm{i}, \qquad r_2 = -2\mathrm{i}, \qquad r_3 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad r_4 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Funcțiile următoare

$$y_1 = \cos 2x, \qquad y_2 = \sin 2x, \qquad y_3 = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \qquad y_4 = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

formează un sistem fundamental de soluții pe $\mathbf{R}$. Soluția generală este deci

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \qquad x \in \mathbf{R}$$

569. Să se integreze ecuația

$$y''' + y'' + y' + y = 0$$

R. Ecuația caracteristică

$$r^3 + r^2 + r + 1 = (r + 1)(r^2 + 1) = 0$$

are rădăcinile distincte

$$r_1 = -1, \qquad r_2 = \mathrm{i}, \qquad = \mathrm{i}, \qquad r_3 = -\mathrm{i}$$

Următoarele funcții

$$y_1 = \mathrm{e}^{-x}, \qquad y_2 = \cos x, \qquad y_3 = \sin x, \qquad x \in \mathbf{R},$$

formează un sistem fundamental de soluții pe $\mathbf{R}$.

Soluția generală pe $\mathbf{R}$ este

$$y = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2\cos x + c_3\sin x$$

570. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Ecuația caracteristică este

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = 0$$

și are rădăcinile complexe duble

$$r_1 = r_2 = \mathrm{i}, \qquad r_3 = r_4 = -\mathrm{i}$$

Un sistem fundamental de soluții este prin urmare

$$y_1 = \cos x, \qquad y_2 = x\cos x, \qquad y_3 = \sin x, \qquad y_4 = x\sin x$$

iar soluția generală

$$y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x$$

571. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y^{\mathrm{IV}} - y''' - y' + y = 0$$

R. Considerăm ecuația caracteristică

$$r^4 - r^3 - r + 1 = (r-1)^2(r^2 + r + 1) = 0$$

care are o rădăcină reală dublă și două rădăcini complex conjugate

$$r_1 = r_2 = 1, \qquad r_3 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad r_4 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Funcțiile următoare

$$y_1 = \mathrm{e}^x, \qquad y_2 = x\mathrm{e}^x, \qquad y_3 = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \qquad y_4 = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

constituie un sistem fundamental de soluții pe $\mathbf{R}$.

Soluția generală este așadar

$$y = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \qquad x \in \mathbf{R}$$

572. Să se integreze ecuația

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \qquad x \neq k\pi, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

R. Avem o ecuație neomogenă. Ecuația omogenă atașată

$$y'' + y = 0$$

are ecuația caracteristică

$$r^2 + 1 = 0$$

cu rădăcinile complexe distincte

$$r_1 = \mathrm{i}, \qquad r_2 = -1.$$

Soluția generală a ecuației omogene este deci

$$y = c_1\sin x + c_2\cos x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea soluției generale a ecuației neomogene folosim metoda variației constantelor. Avem sistemul algebric în c_1', c_2'

$$\begin{cases} c_1' \sin x + c_2' \cos x = 0 \\ c_1' \cos x - c_2' \sin x = \dfrac{1}{\sin x}, \end{cases} \qquad (x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z})$$

care are soluția

$$c_1' = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad c_2' = -1$$

de unde rezultă prin integrare

$$c_1(x) = \ln|\sin x| + k_1, \quad c_2(x) = -x + k_2, \quad (x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z})$$

Soluția generală a ecuației neomogene este prin urmare

$$y = k_1 \sin x + k_2 \cos x + \sin x \ln|\sin x| - x \cos x$$

pe orice interval care nu conține punctele $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

573. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y^{VI} - y^{IV} = x + 1$$

R. Considerăm ecuația omogenă asociată

$$y^{VI} - y^{IV} = 0$$

a cărei ecuație caracteristică

$$r^6 - r^4 = r^4(r^2 - 1) = 0$$

are rădăcinile

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0, \quad r_5 = 1, \quad r_6 = -1$$

Ecuația omogenă are deci soluția generală

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 e^x + c_6 e^{-x}, \qquad x \in \mathbf{R}$$

Pentru ecuația neomogenă putem căuta o soluție particulară de forma

$$y_0 = x^4(ax + b)$$

unde a, b sînt constante ce urmează a fi determinate. Derivăm

$$y_0^{VI} = 5!\, ax + 4!b, \quad y_0^{V} = 5!\, a, \quad y_0^{VI} = 0$$

Înlocuim în ecuația neomogenă

$$-5!\, ax - 4!b \equiv x + 1$$

și obținem prin identificare

$$a = -\frac{1}{5!}, \qquad b = -\frac{1}{4!}$$

Soluția particulară este deci

$$y_0 = -\frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{5!} x^5$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, soluția generală a ecuației neomogene este

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5e^x + c_6e^{-x} - \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Observație. Metoda variației constantelor pentru determinarea lui y_0 ar fi dus, în acest caz, la calcule laborioase.

574. Să se integreze ecuația diferențială neomogenă

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + 2x + 1.$$

R. Asociem ecuația omogenă

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

a cărei ecuație caracteristică este

$$r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2) = 0$$

cu rădăcinile reale distincte

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2$$

Soluția generală a ecuației omogene este deci

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Deoarece membrul doi al ecuației neomogene este suma unui polinom de gradul întîi și a unei exponențiale, putem căuta o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$y_0 = ae^{3x} + bx + c$$

Derivăm de două ori

$$y_0' = 3ae^{3x} + b, \qquad y_0'' = 9ae^{3x}$$

și înlocuim în ecuația neomogenă

$$9ae^{3x} - 3(3ae^{3x} + b) + 2(ae^{3x} + bx + c) \equiv e^{3x} + 2x + 1$$

Prin identificare rezultă

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = 1, \qquad c = 2$$

prin urmare

$$y_0 = \frac{1}{2}e^{3x} + x + 2$$

Soluția generală a ecuației neomogene este așadar

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x} + x + 2, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

575. Să se găsească soluția ecuației

$$y''' - y'' + y' - y = \cos x$$

al cărei grafic are punctul (0, 0) punct de inflexiune, cu tangenta în (0, 0) axa Ox.

Scanned with OKEN Scanner

R. Ecuația omogenă atașată

$$y''' - y'' + y' - y = 0$$

are ecuația caracteristică

$$r^3 - r^2 + r - 1 = (r - 1)(r^2 + 1) = 0$$

cu rădăcinile distincte

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \mathrm{i}, \quad r_3 = -\mathrm{i}.$$

Soluția generală a ecuației omogene este prin urmare

$$y = c_1 e^x + c_2 \sin x + c_3 \cos x, \qquad x \in \mathbf{R}$$

O soluție particulară a ecuației neomogene va fi de forma

$$y_0 = x(a \cos x + b \sin x)$$

Derivăm de trei ori

$$y_0' = a \cos x + b \sin x - ax \sin x + bx \cos x$$

$$y_0'' = -2a \sin x + 2b \cos x - ax \cos x - bx \sin x$$

$$y_0''' = -3a \cos x - 3b \sin x + ax \sin x - bx \cos x$$

Înlocuind în ecuația neomogenă

$$2(a - b) \sin x - 2(a + b) \cos x \equiv \cos x$$

și identificînd obținem sistemul algebric liniar în a, b

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

care are soluția

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = -\frac{1}{4}$$

Soluția generală a ecuației neomogene este așadar

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 \sin x + c_3 \cos x - \frac{1}{4} x(\cos x + \sin x), \qquad x \in \mathbf{R}$$

Pentru a determina soluția particulară cerută, ținem seama de condițiile inițiale

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

Derivăm de două ori pe y dat de soluția generală a ecuației neomogene

$$y'(x) = c_1 e^x + c_2 \cos x - c_3 \sin x - \frac{1}{4}(\cos x + \sin x) - \frac{1}{4} x(\cos x - \sin x)$$

$$y''(x) = c_1 e^x - c_2 \sin x - c_3 \cos x - \frac{1}{2}(\cos x - \sin x) + \frac{1}{4} x(\sin x + \cos x)$$

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile inițiale ne conduc la sistemul algebric în c_1, c_2, c_3

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = \frac{1}{4} \\ c_1 - c_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

care are soluția

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{1}{4}$$

Soluția particulară căutată este deci

$$y = \frac{1}{4}(e^x - \cos x - x \sin x - x \cos x), \qquad x \in \mathbf{R}$$

576. Să se integreze ecuația

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$

R. Este o ecuație diferențială de tip Euler omogenă. Punem

$$y = x^r, \quad (r = \text{const.}), \quad x > 0.$$

Derivăm de două ori

$$y' = rx^{r-1}, \qquad y'' = r(r-1)\,x^{r-2}$$

Înlocuim în ecuație și obținem ecuația caracteristică

$$r(r-1) + 4r + 2 = (r+1)(r+2) = 0$$

care are rădăcinile reale distincte

$$r_1 = -1, \quad r_2 = -2$$

Un sistem fundamental de soluții este

$$y_1 = \frac{1}{x}, \qquad y_2 = \frac{1}{x^2}, \qquad x \neq 0$$

Soluția generală a ecuației date este

$$y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$$

Să găsim soluția particulară care satisface condițiile inițiale

$$y(1) = 0, \qquad y'(1) = 1$$

Derivăm o dată

$$y' = -\frac{c_1}{x} - \frac{2c_2}{x^3}$$

și obținem sistemul

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = -1 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

care are soluția

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = -1$$

Soluția particulară căutată este

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

577. Să se afle soluția generală a ecuației Euler omogene

$$x^2y'' + 2xy' + y = 0$$

R. Ecuația caracteristică

$$r(r-1) + 2r + 1 = r^2 + r + 1 = 0$$

are rădăcinile complexe distincte

$$r_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Funcțiile următoare

$$y_1 = |x|^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|, \qquad y_2 = |x|^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|, \qquad x \neq 0$$

formează un sistem fundamental de soluții. Soluția generală este

$$y = |x|^{-\frac{1}{2}}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x| + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)$$

pe orice interval care nu conține originea.

578. Să se integreze ecuația Euler omogenă

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0$$

R. Ecuația caracteristică este

$$r(r-1) + 3r + 1 = (r+1)^2 = 0$$

și are rădăcina reală dublă

$$r_1 = r_2 = -1.$$

Un sistem fundamental de soluții îl formează funcțiile

$$y_1 = \frac{1}{x}, \qquad y_2 = \frac{1}{x}\ln|x|, \qquad x \neq 0$$

Soluția generală a ecuației date este așadar

$$y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x}\ln|x|$$

pe orice interval care nu conține punctul $x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

579. Să se afle soluția generală a ecuației Euler omogene

$$x^4y^{IV} + 3x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$$

R. Ecuația caracteristică

$$r(r-1)(r-2)(r-3) + 3r(r-1) - 5r + 5 = (r-1)^2(r^2+4r+5) = 0$$

are rădăcinile

$$r_1 = r_2 = 1, \quad r_3 = 2 + i, \quad r_4 = 2 - i$$

Un sistem fundamental de soluții pe $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ este

$$y_1 = x, \quad y_2 = x \ln|x|, \quad y_3 = x^2 \cos \ln|x|, \quad y_4 = x^2 \sin \ln|x|.$$

Deci soluția generală a ecuației date este

$$y = x(c_1 + c_2 \ln|x|) + x^2(c_3 \cos \ln|x| + c_4 \sin \ln|x|), \qquad x \neq 0.$$

580. Să se integreze ecuația diferențială

$$(2x+1)^2 y'' - 4(2x+1)y' + 8y = 0$$

R. Se numește tot ecuație Euler (omogenă). Punem

$$y = (2x+1)^r, \quad (r = \text{const.}), \quad 2x + 1 > 0$$

Derivăm de două ori

$$y' = 2r(2x+1)^{r-1}, \qquad y'' = 4r(r-1)(2x+1)^{r-2}$$

Înlocuind în ecuația dată și efectuînd calculele, obținem ecuația

$$4r(r-1) - 8r + 8 = 4(r-1)(r-2) = 0$$

numită de asemenea ecuația caracteristică a ecuației Euler.

Rădăcinile sale sînt

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = 2$$

iar un sistem fundamental de soluții este deci

$$y_1 = 2x + 1, \qquad y_2 = (2x+1)^2, \qquad x \neq -\frac{1}{2}$$

Soluția generală a ecuației date este așadar

$$y = c_1(2x+1) + c_2(2x+1)^2$$

581. Să se integreze ecuația Euler neomogenă

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = \sin x$$

și să se determine curba integrală care are în punctul $(\pi, 0)$ tangenta paralelă cu prima bisectoare a axelor de coordonate.

R. Ecuația omogenă asociată

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

are ecuația caracteristică

$$r(r-1)+5r+3=(r+1)(r+3)=0$$

cu rădăcinile reale distincte

$$r_1=-1, \quad r_2=-3$$

Un sistem fundamental de soluții este deci

$$y_1=\frac{1}{x}, \quad y_2=\frac{1}{x^3}; \quad x\neq 0$$

iar soluția generală a ecuației omogene

$$y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^3}$$

Pentru determinarea soluției generale a ecuației neomogene folosim metoda variației constantelor. Avem sistemul algebric în c_1', c_2'

$$\begin{cases} \frac{c_1'}{x}+\frac{c_2'}{x^3}=0 \\ -\frac{c_1'}{x^2}-3\frac{c_2'}{x^4}=\frac{\sin x}{x^3} \end{cases}$$

care are soluția

$$c_1'=\frac{1}{2}\sin x, \qquad c_2'=-\frac{1}{2}x^2\sin x$$

Prin integrare rezultă

$$c_1(x)=-\frac{1}{2}\cos x+k_1, \qquad c_2(x)=\frac{1}{2}x^2\cos^2 x-x\sin x-\cos x+k_2$$

Soluția generală a ecuației date este

$$y=\frac{k_1}{x}+\frac{k_2}{x^3}-\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x^3}$$

Constantele k_1, k_2 le determinăm din condițiile inițiale

$$y(\pi)=0, \quad y'(\pi)=1$$

Derivăm pe y dat de soluția generală

$$y'=-\frac{k_1}{x^2}-3\frac{k_2}{x^4}-\frac{\cos x}{x^2}+3\frac{\sin x}{x^3}+3\frac{\cos x}{x^4}$$

Condițiile inițiale ne conduc la sistemul

$$\begin{cases} \frac{k_1}{\pi}+\frac{k_1}{\pi^3}=-\frac{1}{\pi^3} \\ \frac{k_1}{\pi^2}+\frac{3k_2}{\pi^4}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{3}{\pi^4} \end{cases}$$

care are soluția

$$k_1=\frac{1}{2}(\pi^2-1), \quad k_2=-\frac{1}{2}(\pi^4-\pi^2+2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția particulară cerută este prin urmare

$$y = (\pi^2 - 1)\frac{x}{2} - (\pi^4 - \pi^2 + 2)\frac{x^3}{2} - \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x^3}$$

582. Să se găsească curba plană a cărei rază de curbură să fie proporțională cu normala.

R. Raza de curbură a unei curbe plane, avînd ecuația

$$y = y(x), \qquad x \in [\alpha, \beta]$$

în punctul (x, y) este dată de formula

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

iar lungimea normalei în acest punct este dată de formula

$$N = y\sqrt{1 + y'^2}$$

Condiția din enunț $R = aN$, ($a = \text{const.}$), ne conduce la ecuația diferențială

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = ay\sqrt{1 + y'^2}$$

Dacă facem substituția

$$y' = p(y), \qquad y'' = \frac{dy'}{dp} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

atunci ecuația devine

$$\frac{p\,dp}{1 + p^2} = \frac{1}{a}\frac{dy}{y}$$

de unde rezultă

$$p = \pm\sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{a}} - 1}$$

Înlocuind p cu $\frac{dy}{dx}$, obținem

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{a}} - 1}}, \qquad x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^{\frac{2}{a}} - 1}}$$

Această integrală este binomă și se rezolvă prin funcții elementare în următoarele trei cazuri

I) $a = 1$, $\quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c_1}\right)^2 - 1}}$

de unde rezultă prin integrare curba numită *lănțișor*

$$y = c_1 \operatorname{ch}\frac{x - c_2}{c_1}$$

Scanned with OKEN Scanner

II) $a = 2, \qquad x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{y}{c_1} - 1}}$

de unde rezultă prin integrare familia de parabole

$$(x - c_2)^2 = 4c_1(y - c_1)$$

III) $a = -1, \qquad x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{c_1}{y}\right)^2 - 1}}$

care ne dă prin integrare familia de cercuri

$$(x - c_2)^2 + y^2 = c_1^2$$

583. Conform legii lui Newton, la mișcarea unui corp (punct material) de-a lungul axei Ox, avem $m\frac{d^2x}{dt^2} = f$, unde m este masa corpului, f este forța care acționează asupra corpului, x este spațiul, iar t este timpul. Să se găsească ecuația de mișcare a corpului asupra căruia lucrează concomitent două forțe: forța elastică f_1, proporțională cu devierea de la poziția de echilibru, ($f_1 = -a^2x$) și forța de frecare f_2, care este proporțională cu viteza, $\left(f_2 = -k\frac{dx}{dt}\right)$.

R. Conform enunțului, legea de mișcare a corpului este

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x - k\frac{dx}{dt}$$

Dacă facem notațiile

$$k = 2pm, \qquad a^2 = qm$$

atunci ecuația diferențială de mai sus devine

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2p\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

Avem deci o ecuație liniară omogenă de ordinul doi cu coeficienți constanți, x fiind funcția necunoscută, iar t variabila independentă. Ecuația sa caracteristică este

$$r^2 + 2pr + q = 0, \quad (x = e^{rt}, \quad r = \text{const.}).$$

Se prezintă următoarele trei cazuri

I) $p^2 - q = \nu^2 > 0, \quad r_1 = -p + \nu, \quad r_2 = -p - \nu$

deci rădăcini reale și distincte. Rezultă ecuația (finită) de mișcare

$$x = e^{-pt}(c_1e^{\nu t} + c_2e^{-\nu t}), \qquad t \in \mathbf{R}$$

II) $p^2 - q = -\nu^2 < 0, \quad r_1 = -p + i\nu, \quad r_2 = -p - i\nu, \quad (i = \sqrt{-1})$

deci rădăcini complex conjugate. Rezultă

$$x = e^{-pt}(c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t) = ce^{-pt}\cos(\nu - \alpha)t, \qquad t \in \mathbf{R}$$

unde c, α sînt, ca și c_1, c_2, constante oarecare.

Scanned with OKEN Scanner

III) $p^2 - q = 0, \qquad r_1 = r_2 = -p$

deci rădăcini reale confundate. Rezultă în acest caz

$$x = (c_1 t + c_2)\, e^{-pt}, \qquad t \in \mathbf{R}$$

584. Pentru încovoierea unei plăci subțiri circulare, încastrate de-a lungul conturului și supusă acțiunii unei greutăți P în centrul ei este valabilă relația

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x \frac{d\varphi}{dx} - \varphi + kx = 0, \quad (k = \text{const.})$$

Să se integreze și să se determine constantele de integrare pentru condițiile limită

$$(x = 0, \quad \varphi = 0), \qquad (x = R, \quad \varphi = 0)$$

Să se calculeze săgeata de încovoiere din

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi.$$

R. Relația dată este o ecuație diferențială de tip Euler neomogenă Ecuația omogenă asociată

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x \frac{d\varphi}{dx} - \varphi = 0$$

are ecuația caracteristică

$$r(r-1) + r - 1 = r^2 - 1 = 0, \qquad (\varphi = x^r, \quad r = \text{const.})$$

cu rădăcinile reale și distincte

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = -1$$

Ecuația omogenă are deci soluția generală

$$\varphi(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Pentru ecuația neomogenă căutăm o soluție particulară de forma

$$\varphi_0(x) = Ax \ln |x|$$

Derivăm de două ori

$$\varphi_0'(x) = A(\ln x + 1), \qquad \varphi_0''(x) = \frac{A}{x}, \qquad x > 0.$$

Înlocuim în ecuația neomogenă

$$Ax + Ax(\ln x + 1) - Ax \ln x + kx \equiv 0$$

Efectuînd calculele și identificarea, obținem

$$A = -\frac{1}{2} k$$

de unde rezultă că soluția prticulară căutată are forma

$$\varphi_0(x) = -\frac{1}{2} kx \ln |x|, \qquad x \neq 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția generală a ecuației neomogene este așadar

$$\varphi(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x} - \frac{1}{2} kx \ln |x|, \qquad x \neq 0$$

Ținînd seama de condițiile inițiale

$$(x \to 0, \quad \varphi \to 0), \qquad (x = R, \quad \varphi = 0)$$

rezultă pentru c_1, c_2 expresiile

$$c_1 = \frac{2}{1} k \ln R, \qquad c_2 = 0$$

Soluția particulară căutată este prin urmare

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} kx(\ln R - \ln |x|), \qquad x \neq 0$$

Pentru calculul săgeții de încovoiere avem conform enunțului

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} kx \ln \left| \frac{R}{x} \right|$$

de unde rezultă ecuația cu variabile separate

$$dy = \frac{1}{2} kx \ln \left| \frac{R}{x} \right| dH$$

Integrînd, obținem succesiv

$$y(x) = \frac{1}{2} k \int_x^R x \ln \left| \frac{R}{x} \right| dx = \frac{1}{8} k(R^2 - x^2) + \frac{1}{4} kx^2 \ln \left| \frac{x}{R} \right|, \qquad x \neq 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XV

SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

585. Să se arate că sistemul de ecuații diferențiale omogene

$$\begin{cases} x' - \cos^2 t \cdot x + (1 - \sin t \cos t)\, y = 0, \\ y' - (1 + \sin t \cos t)\, x - \sin^2 t \cdot y = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

admite soluțiile particulare

$$(e^t \cos t,\ e^t \sin t) \text{ și } (-\sin t,\ \cos t)$$

care formează un sistem fundamental pe R. Să se scrie soluția generală.

R. Este ușor de verificat că următoarele sisteme de funcții

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t \cos t, \\ y_1(t) = e^t \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\sin t, \\ y_2 = \cos t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

formează două sisteme de soluții particulare ale sistemului de ecuații dat.

Deoarece wronskianul acestor două soluții (sisteme de soluții)

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t \cos t - \sin t \\ e^t \sin t \quad \cos t \end{vmatrix} = e^t$$

este diferit de zero pe R, rezultă că cele două soluții particulare constituie un sistem fundamental de soluții pe $\mathbf{R}$.

Soluția generală a sistemului este așadar

$$\begin{cases} x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^t \cos t - C_2 \sin t, \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^t \sin t + C_2 \cos t, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}$$

unde C_1, C_2 sînt constante arbitrare.

586. Se consideră sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 9x + 12y + 5z = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - 5x - 6y - 3z = 0 \\ \dfrac{dz}{dt} - x - 4y - z = 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că soluțiile particulare

$$\begin{cases} x_1 = 2\,e^{2t} \\ y_1 = -e^{2t} \\ z_1 = -2\,e^{2t} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = (2t+1)\,e^{-2t} \\ y_2 = -2t\,e^{-2t} \\ z_2 = (2t+1)\,e^{-2t} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_3 = -e^{-2t} \\ y_3 = e^{-2t} \\ z_3 = -e^{-2t} \end{cases}, \qquad (t \in \mathbf{R})$$

formează un sistem fundamental pe $\mathbf{R}$ și să se scrie soluția generală.

R. Se verifică ușor că funcțiile date constituie un sistem de soluții particulare, care formează un sistem fundamental, deoarece wronskianul acestor soluții

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^{2t} & -e^{2t} & -2e^{2t} \\ (2t+1)^{-2t} & -2t\,e^{-2t} & (2t+1)\,e^{-2t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} & e^{-2t} \end{vmatrix} = -4e^{-2t}$$

este diferit de zero pe R. Soluția generală a sistemului dat este deci

$$\begin{cases} x = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = 2C_1\,e^{2t} + (2t+1)\,C_2\,e^{-2t} - C_3\,e^{-2t} \\ y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 = -C_1\,e^{2t} - 2t\,C_2\,e^{-2t} + C_3\,e^{-2t} \\ z = C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3 = 2C_1\,e^{2t} + (2t+1)\,e^{-2t} - C_3\,e^{-2t} \end{cases}, \qquad (t \in \mathbf{R})$$

unde C_1, C_2, C_3 sînt constante oarecare.

587. Să se construiască sistemul de ecuații diferențiale liniare de ordinul întîi omogene, ce are ca soluții particulare

$$\begin{cases} y_1 = e^{-4x} \\ z_1 = \frac{1}{2}\,e^{-4x} \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_2 = e^{-7x} \\ z_2 = -e^{-7x} \end{cases}, \qquad x \in$$

R. Sistemul de soluții dat este fundamental deoarece wronskianul acestor soluții

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-4x} & \frac{1}{2}\,e^{-4x} \\ e^{-7x} & -e^{-7x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\,e^{-11x}$$

este diferit de zero pe $\mathbf{R}$.

Sistemul de ecuații diferențiale cerut este dat de

$$\begin{vmatrix} y' & y & z \\ y_1' & y_1 & z_1 \\ y_2' & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} z' & y & z \\ z_1' & y_1 & z_1 \\ z_2' & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

sau, înlocuind pe y_1, z_1, y_2, z_2

$$\begin{vmatrix} y' & y & z \\ -4e^{-4x} & e^{-4x} & \frac{1}{2}\,e^{-4x} \\ -7e^{-7x} & e^{-7x} & -e^{-7x} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} z' & y & z \\ -2e^{-4x} & e^{-4x} & \frac{1}{2}\,e^{-4x} \\ 7e^{-7x} & e^{-7x} & -e^{-7x} \end{vmatrix} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectuînd calculele, obținem sistemul căutat

$$\begin{cases} y' + 5y - 2z = 0 \\ z' - y + 6z = 0 \end{cases}$$

588. Să se rezolve sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} x' - \cos^2 t\, x + (1 - \sin t \cos t)\, y = 0 \\ y' - (1 + \sin t \cos t)\, x - \sin^2 t \cdot y = 0 \end{cases}$$

știind că admite soluția particulară

$$\begin{cases} x_0(t) = -\sin t, \\ y_0(t) = \cos t, \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Să se afle soluția particulară care satisface condițiile inițiale

$$x(0) = 1, \qquad y(0) = 2.$$

R. Avem un sistem de ecuații diferențiale de ordinul *I*, liniar, omogen, cu coeficienți variabili, pe care-l vom transforma într-o ecuație diferențială de ordinul II. Din ecuația a două a sistemului scoatem

$$x = \frac{y' - y \sin^2 t}{1 + \sin t \cos t}$$

Introducem în prima ecuație a sistemului și obținem

$$(1 + \sin t \cos t)\, y'' - (2\cos^2 t + \sin t \cos t)\, y' + (1 - \sin^2 t - \sin t)\, y = 0$$

care este o ecuație diferențială de ordinul II ce are soluția particulară

$$y_0(t) = \cos t$$

Facem substituția

$$y = y_0 u(t) = u \cos t$$

și derivăm de două ori

$$y' = u' \cos t - u \sin t, \qquad y'' = u'' \cos t - 2u' \sin t - u \cos t$$

Ecuația se scrie

$$\cos t\,(1 + \sin t \cos t)\, u'' - (2 \sin t + 2 \cos t + \sin t \cos^2 t)\, u' = 0$$

sau sub forma

$$\frac{u''}{u'} = \frac{2 \sin t + 2 \cos t + \sin t \cos^2 t}{1 + \sin t \cos t}$$

de unde, prin integrare

$$\ln u' = t + \ln (1 + \sin t \cos t) - 2 \ln \cos t + \ln C_2,$$

$$u' = C_2 \frac{1 + \sin t \cos t}{\cos^2 t} e^t.$$

Scanned with OKEN Scanner

Integrînd din nou, obținem

$$u = C_2 \int \frac{1 + \sin t \cos t}{\cos^2 t} e^t \, dt = C_2 e^t \operatorname{tg} t + C_1,$$

$$y = u \cos t = C_1 \cos t + C_2 e^t \sin t.$$

Înlocuind pe y, y' în expresia lui x scoasă din a doua ecuație a sistemului, obținem soluția generală

$$\begin{cases} x = -C_1 \sin t + C_2 e^t \cos t \\ y = \quad C_1 \cos t + C_2 e^t \sin t \end{cases}$$

Condițiile inițiale ne dau

$$C_1 = 2, \quad C_2 = 1$$

iar soluția problemei lui Cauchy este prin urmare

$$\begin{cases} x = -2 \sin t + e^t \cos t \\ y = \quad 2 \cos t + e^t \sin t \end{cases}, \qquad t \in \mathbf{R}$$

589. Să se afle soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

R. Derivăm prima ecuație în raport cu t

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$$

Între aceste trei ecuații, eliminăm pe y și $\frac{dy}{dt}$. Avem

$$y = x - \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = 2x - \frac{dx}{dt}$$

Înlocuind pe $\frac{dy}{dt}$ în ecuația a treia, obținem următoarea ecuație diferențială liniară de ordinul doi cu coeficienți constanți, omogenă.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

Ecuația sa caracteristică este

$$r^2 - 2r + 2 = 0, \qquad (x = e^{rt})$$

cu rădăcinile complex conjugate

$$r_1 = 1 + i, \qquad r_2 = 1 - i \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Soluția generală a ecuației de mai sus este așadar

$$x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem apoi succesiv

$$y = x - \frac{dx}{dt} = e^t(C_1 \sin t - C_2 \cos t)$$

Prin urmare, soluția generală a sistemului dat este

$$(\Gamma)\begin{cases} x = (C_1 \cos t + C_2 \sin t)\, e^t \\ y = (C_1 \sin t - C_2 \cos t)\, e^t, \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}$$

și reprezintă o familie de curbe plane Γ care depinde de două constante arbitrare C_1, C_2.

590. Să se integreze sistemul

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y^2}{x} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x^2}{y} \end{cases}$$

făcînd substituția

$$x^2 = u(t), \qquad y^2 = v(t).$$

R. Derivînd în raport cu t, avem

$$\frac{du}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dv}{dt} = 2y\frac{dy}{dt}$$

de unde rezultă sistemul în u,v

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 2v \\ \frac{dv}{dt} = 2u \end{cases}$$

Derivăm prima din aceste ecuații și ținem seama de a doua

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 2\frac{dv}{dt} = 4u$$

prin urmare funcția u satisface ecuația diferențială de ordinul doi

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 4u = 0$$

care are soluția generală

$$u = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Avem apoi succesiv

$$v = \frac{1}{2} \cdot \frac{du}{dt} = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}$$

Soluția generală a sistemului dat este deci

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}} \\ y(t) = \sqrt{C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}}, \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}$$

Scanned with OKEN Scanner

591. Să se determine soluția generală a sistemului omogen

$$\frac{dx}{dt} + x - y = 0, \quad \frac{dy}{dt} + y - 4z = 0, \quad \frac{dz}{dt} + 4z - x = 0.$$

R. Derivăm o dată ecuațiile sistemului

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 4\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 4\frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt} = 0$$

Rezultă astfel că avem succesiv

$$y = x + \frac{dx}{dt}, \quad z = \frac{1}{4}\left(y + \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{4}\left(x + 2\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^3x}{dt^3}\right).$$

Înlocuind pe z și $\frac{dz}{dt}$ în ultima ecuație din sistem, obținem următoarea ecuație diferențială liniară de ordinul trei omogenă, cu coeficienți constanți verificată de funcția necunoscută x

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} = 0$$

Ecuația sa caracteristică

$$r^3 + 6r^2 + 9r = r(r+3)^2 = 0, \qquad (x = e^{rt})$$

are rădăcinile reale

$$r_1 = 0, \qquad r_2 = r_3 = -3$$

astfel că soluția generală a ecuației de mai sus este

$$x = C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t}$$

Avem apoi

$$y = x + \frac{dx}{dt} = C_1 + (C_3 - 2C_2) e^{-3t} - 3C_3 t e^{-3t}$$

$$z = \frac{1}{4}\left(y + \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{4} C_1 + \frac{1}{4}(4C_2 - 5C_3) e^{-3t} + \frac{9}{4} C_3 t e^{-3t}$$

Soluția generală a sistemului este așadar:

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-3t} + C_3 t e^{-3t} \\ y = C_1 + (C_3 - 2C_2) e^{-3t} - 3C_3 t e^{-3t} \\ z = \frac{1}{4}[C_1 + (4C_2 - 5C_3) e^{-3t} + 9C_3 t e^{-3t}] \end{cases}, \qquad t \in \mathbf{R}$$

Scanned with OKEN Scanner

592. Să se rezolve sistemul neomogen

$$\begin{cases} t^2 \dfrac{dx}{dt} - y = t^2 \\ t \dfrac{dy}{dt} + 2tx - 4y = t^2 \end{cases}, \quad t > 0$$

R. Considerăm sistemul omogen asociat

$$\begin{cases} t^2 \dfrac{dx}{dt} - y = 0 \\ t \dfrac{dy}{dt} + 2t\,x - 4y = 0 \end{cases}$$

Din prima ecuație a acestui sistem avem

$$y = t^2 \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2t \frac{dx}{dt}$$

Înlocuind în ecuația a doua, obținem ecuația Euler omogenă

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} - 2t \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

care are ecuația caracteristică

$$r(r-1) - 2r + 2 = r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$$

cu rădăcinile reale distincte

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = 2$$

Soluția generală a ecuației Euler este

$$x = C_1 t + C_2 t^2$$

Avem apoi succesiv

$$y = t^2 \frac{dx}{dt} = t^2(C_1 + C_2 t) = C_1 t^2 + 2C_2 t^3$$

Soluția generală a sistemului omogen este deci

$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2 t^2 \\ y = C_1 t^2 + 2C_2 t^3 \end{cases} \qquad (t > 0)$$

Pentru determinarea soluției generale a sistemului neomogen aplicăm metoda variației constantelor. Avem sistemul algebric liniar în C_1', C_2'

$$\begin{cases} C_1' t + C_2' t^2 = 1 \\ C_1' t^2 + 2C_2' t^3 = t \end{cases}$$

care are soluția

$$C_1' = \frac{1}{t}, \qquad C_2' = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă prin integrare

$$C_1(t) = K_1 + \ln t, \qquad C_2(t) = K_2$$

unde K_1, K_2 sînt constante de integrare. Soluția generală a sistemului dat este

$$\begin{cases} x = K_1 t + K_2 t^2 + t \ln t \\ y = K_1 t^2 + 2K_2 t^3 + t^2 \ln t \end{cases}, \quad t > 0$$

de unde rezultă că o soluție particulară a sistemului neomogen este

$$\begin{cases} x_0 = t \ln t \\ y_0(t) = t^2 \ln t \end{cases}, \quad t > 0$$

593. Să se găsească soluția generală a sistemului neomogen

$$\begin{cases} 3\dfrac{dx}{dt} - x + 2y = t + 1 \\ 3\dfrac{dy}{dt} + 4x + y = 2t + 3 \end{cases}$$

precum și soluția particulară care satisface condițiile inițiale.

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 1$$

R. Asociem sistemul omogen

$$\begin{cases} 3\dfrac{dx}{dt} - x + 2y = 0 \\ 3\dfrac{dy}{dt} + 4x + y = 0 \end{cases}$$

Eliminînd pe y, obținem ecuația liniară de ordinul doi în x

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$$

care are ecuația caracteristică

$$r^2 - 1 = 0, \qquad (x = e^{rt})$$

cu rădăcinile reale distincte

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = -1$$

Soluția generală a ecuației de mai sus este deci

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Avem apoi succesiv

$$y = \frac{1}{2} x - \frac{3}{2} \frac{dx}{dt} = -C_1 e^t + 2C_2 e^{-t}$$

Soluția generală a sistemului omogen este așadar

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ y = -C_1 e^t + 2C_2 e^{-t} \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}$$

Pentru determinarea soluției generale a sistemului neomogen aplicăm metoda variației constante. Avem sistemul liniar algebric în C_1', C_2'

$$\begin{cases} C_1' e^t + C_2' e^{-t} = \frac{t+1}{3} \\ -C_1' e^t + 2C_2' e^{-t} = \frac{2t+3}{3} \end{cases}$$

care are soluția

$$C_1' = -\frac{1}{9} e^{-t}, \qquad C_2' = \frac{3t+4}{9} e^t$$

Integrînd, obținem

$$C_1 = K_1 + \frac{1}{9} e^{-t}, \qquad C_2 = K_2 + \frac{1}{9} e^t + \frac{1}{3} t e^t$$

Soluția generală a sistemului neomogen este prin urmare

$$\begin{cases} x = K_1 e^t + K_2 e^{-t} + \frac{1}{3} t + \frac{21}{9} \\ y = -K_1 e^t + 2K_2 e^{-t} + \frac{2}{3} t + \frac{1}{9} \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}$$

Condițiile inițiale ne conduc la sistemul algebric liniar în K_1, K_2

$$K_1 + K_2 + \frac{2}{9} = 0$$

$$-K_1 + 2K_2 + \frac{1}{9} = 1$$

care are soluția

$$K_1 = -\frac{4}{9}, \qquad K_2 = \frac{2}{9}$$

Soluția particulară căutată este deci

$$\begin{cases} x_0(t) = -\frac{4}{9} e^t + \frac{2}{9} e^{-t} + \frac{1}{3} t + \frac{2}{9} \\ y_0(t) = \frac{4}{9} e^t + \frac{4}{9} e^{-t} + \frac{2}{3} t + \frac{1}{9} \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}$$

iar graficul ei este o curbă plană.

594. Să se integreze sistemul

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$$

R. Este un sistem simetric. Avem combinațiile integrabile

$$\begin{cases} x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \\ dx + dy + dz = 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

care ne dau integralele prime

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= C_1 \\ x + y + z &= C_2 \end{aligned} \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

Soluția generală a sistemului dat este deci formată dintr-o familie de cercuri în spațiu care depinde de doi parametri.

595. Să se afle integrala generală a sistemului

$$\begin{cases} (y^2 + z^2 - x^2)\dfrac{dy}{dx} = -2xy \\ (y^2 + z^2 - x^2)\dfrac{dz}{dx} = -2xz \end{cases}$$

R. Sub formă simetrică se scrie

$$\frac{dx}{y^2 + z^2 - x^2} = \frac{dy}{-2xy} = \frac{dz}{-2xz}$$

Avem combinația integrabilă

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

care ne dă integrala primă

$$z = C_1 y$$

Ținînd seama de această integrală primă, ecuația întîi a sistemului se mai poate scrie

$$2xy\frac{dx}{dy} + (1 + C_1^2)\, y^2 - x^2 = 0$$

Dacă facem substituția

$$x^2 = u(y), \qquad 2x\frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}$$

atunci obținem ecuația liniară

$$\frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u + (1 + C_1^2)\, y = 0$$

care are soluția generală

$$u = y\,[C_2 - (1 + C_1^2)\, y]$$

Integrala generală a sistemului dat este așadar

$$\begin{cases} x^2 = C_2 y - (1 + C_1^2)\, y^2 \\ z = C_1 y \end{cases}$$

596. Să se integreze sistemul

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{yz} = -\frac{dz}{z^2 + 1}$$

Scanned with OKEN Scanner

R. Din combinația integralabilă

$$\frac{dy}{y} = -\frac{z\,dz}{z^2+1}$$

rezultă integrala primă

$$y\sqrt{z^2+1} = C_1$$

Avem apoi succesiv

$$\frac{dx}{y} = \frac{z\,dy}{yz^2} = \frac{y\,dz}{-y(z^2+1)} = \frac{dx + z\,dy + y\,dz}{0}$$

$$dx + z\,dy + y\,dz = 0$$

de unde obținem prin integrare

$$x + yz = C_2$$

Soluția generală este

$$\begin{cases} y\sqrt{z^2+1} = C_1 \\ x + yz = C_2 \end{cases}$$

597. Să se afle soluția generală a sistemului

$$\frac{dx}{x(1-2y^2)} = \frac{dy}{-y(1+2x^2)} = \frac{dz}{2z(x^2+y^2)}$$

R. Din primele două rapoarte avem succesiv

$$\frac{1+2x^2}{x}dx = -\frac{1-2y^2}{y}dy, \quad \left(\frac{1}{x}+2x\right)dx + \left(\frac{1}{y}-2y\right)dy = 0$$

de unde obținem prin integrare

$$\ln x + x^2 + \ln y - y^2 = \ln C_1, \qquad xye^{x^2-y^2} = C_1$$

Apoi avem

$$\frac{\frac{dx}{x}}{1-2y^2} = \frac{\frac{dy}{y}}{-1-2x^2} = \frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}}{-2(x^2+y^2)} = \frac{\frac{dz}{z}}{2(x^2+y^2)},$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0$$

de unde rezultă prin integrare

$$\ln x + \ln y + \ln z = \ln C_2, \qquad xyz = C_2$$

Soluția generală a sistemului este

$$\begin{cases} xy\,e^{x^2-y^2} = C_1 \\ xyz = C_2 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

598. Să se integreze sistemul simetric

$$\frac{dx_1}{x_2+x_3+x_4}=\frac{dx_2}{x_3+x_4+x_1}=\frac{dx_3}{x_4+x_1+x_2}=\frac{dx_4}{x_1+x_2+x_3}$$

R. Le adunăm și egalăm cu rezultatul scăderii raportului al treilea din raportul al doilea

$$\frac{dx_1+dx_2+dx_3+dx_4}{3(x_1+x_2+x_3+x_4)}=\frac{dx_2-dx_3}{-(x_2-x_3)}$$

Prin integrare, obținem

$$\frac{1}{3}\ln(x_1+x_2+x_3+x_4)=-\ln(x_2-x_3)+\frac{1}{3}\ln C_1$$

deci avem integrala primă

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_2-x_3)^3=C_1$$

Din motive de simetrie, se obține prin permutări circulare

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_2-x_3)^3=C_1$$
$$(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_3-x_4)^3=C_2$$
$$(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_4-x_1)^3=C_3$$

care este soluția generală a sistemului dat.

599. Să se determine curbele ortogonale familiei de sfere

$$x^2+y^2+z^2=C,\quad (x,y,z)\in\mathbf{R}^3$$

R. Sistemul de ecuații diferențiale care determină curbele ortogonale este

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

și admite combinațiile integrabile

$$\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0,\qquad \frac{dy}{y}-\frac{dz}{z}=0$$

cu integrale prime

$$x=K_1y,\qquad y=K_2z,\qquad (x,y,z)\in\mathbf{R}^3$$

prin urmare curbele ortogonale sînt dreptele care trec prin centrul sferei.

600. Să se determine curbele ortogonale la familia de suprafețe

$$4x^2+y^2=Cz,\qquad (x,y,z)\in\mathbf{R}^3$$

R. Notăm

$$F(x,y,z)=\frac{4x^2+y^2}{z},\quad F'_x=\frac{8x}{z},\quad F'_y=\frac{2y}{z},\quad F'_z=-\frac{4x^2+y^2}{z^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Curbele ortogonale familiei de suprafețe

$$F(x, y, z) = C$$

sînt date de sistemul simetric

$$\frac{dx}{F'_x} = \frac{dy}{F'_y} = \frac{dz}{F'_z}$$

În cazul nostru, avem

$$\frac{dx}{8x} = \frac{dy}{2y} = \frac{z\,dz}{-(4x^2 + y^2)}$$

Prima combinație integrabilă este

$$\frac{dx}{4x} = \frac{dy}{y}$$

și ne dă integrala primă

$$\frac{1}{4}\ln x = \ln y + \frac{1}{4}K_1, \qquad x = K_1 y^4$$

Avem apoi combinația integrabilă

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{2(4x^2 + y^2)} = \frac{2z\,dz}{-2(4x^2 + y^2)}, \quad x\,dx + y\,dy + 2z\,dz = 0$$

care ne dă prin integrare

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = K_2$$

Curbele căutate sînt

$$\begin{cases} x = K_1 y^4 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = K_2 \end{cases}$$

601. Să se găsească liniile ortogonale la familia de suprafețe

$$\operatorname{div} \vec{V} = C, \quad \vec{V} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}, \ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

R. Avem succesiv

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz^2) = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz$$

deci familia de suprafețe este dată de ecuația

$$6xyz = C$$

Sistemul de ecuații diferențiale al liniilor ortogonale este

$$\frac{dx}{6yz} = \frac{dy}{6zx} = \frac{dz}{6xy}$$

care are combinațiile integrabile

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}, \qquad \frac{dx}{z} = \frac{dz}{x}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu integralele prime

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = K_1 \\ x^2 - z^2 = K_2 \end{cases}$$

602. Se dă cîmpul vectorial

$$\vec{F} = \vec{r} \times \vec{a}, \quad \vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \quad \vec{a} = \vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

Să se determine liniile sale de cîmp.

R. Avem

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \vec{i}(a_3y - a_2z) + \vec{j}(a_1z - a_3x) + \vec{k}(a_2x - a_1y)$$

Sistemul de ecuaţii care defineşte liniile de cîmp

$$\frac{dx}{a_3y - a_2z} = \frac{dy}{a_1z - a_3x} = \frac{dz}{a_2x - a_1y}$$

admite combinaţiile integrabile

$$\begin{cases} a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz = 0 \\ x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \end{cases}$$

şi integralele prime

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = C_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2 \end{cases}$$

Prin urmare, liniile de cîmp sînt cercuri.

603. Să se determine liniile de cîmp ale cîmpului vectorial

$$\vec{V} = (y^2 + z^2 - x^2)\,\vec{i} - 2xy\,\vec{j} - 2xz\vec{k}, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

R. Ecuaţiile liniilor de cîmp sînt

$$\frac{dx}{y^2 + z^2 - x^2} = \frac{dy}{-2xy} = \frac{dz}{-2xz}$$

Prima combinaţie integrabilă

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

ne conduce la integrala primă

$$y = C_1z$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem apoi succesiv

$$\frac{x\,dx}{y^2+z^2-x^2}=\frac{y\,dy}{-2y^2}=\frac{z\,dz}{-2z^2}=-\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$$

de unde rezultă combinația integrabilă

$$\frac{2(x\,dx+y\,dy+z\,dz)}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dy}{y}$$

care ne dă prin integrare

$$\ln(x^2+y^2+z^2)=\ln C_2y,\qquad x^2+y^2+z^2=C_2y$$

Liniile de cîmp sînt cercurile: $\begin{cases} y=C_1z \\ x^2+y^2+z^2=C_2y \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XVI

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI LINIARE

604. Se dă ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Să se arate că funcția $u=\varphi(x-y)$, unde φ este o funcție arbitrară. derivabilă continuu de argumentul $v=x-y$, este o soluție a ecuației date,

R. Avem succesiv

$$\frac{\partial v}{\partial x}=1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\varphi'(v), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{d\varphi}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\varphi'(v)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(v)-\varphi'(v)\equiv 0$$

de unde rezultă că funcția $u=\varphi(v)$ este soluție a ecuației date.

605. Să se arate că funcția

$$z=f(x+ay)$$

unde f este o funcție derivabilă, satisface ecuația cu derivate parțiale

$$a\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

R. Dacă notăm $t=x+ay$, atunci avem

$$\frac{\partial t}{\partial x}=1, \qquad \frac{\partial t}{\partial y}=a$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{df}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=f'(t), \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{df}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=a\,f'(t)$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=af'(t)-a.\,f'(t)\equiv 0.$$

606. Se dă ecuaţia

$$a\frac{\partial W}{\partial x}+b\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial t}=0$$

Să se arate că ea este verificată de funcţia

$$W=f(x+at,\quad y+bt),\quad (a,b=\text{const.})$$

R. Facem notaţiile

$$u=x+at,\ v=y+bt$$

şi obţinem succesiv

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}=a,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=1,\ \frac{\partial v}{\partial t}=b$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f'_u,\qquad \frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f'_v$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\ af'_u+bf'_v$$

$$a\frac{\partial W}{\partial x}+b\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial t}=a\cdot f'_u+b\cdot f'_v-(a\cdot f'_u+b\cdot f'_v)\equiv 0.$$

607. Să se integreze ecuaţia cu derivate parţiale omogenă

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

R. Sistemul caracteristic asociat

$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}$$

are soluţia generală

$$x^2+y^2=C$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este prin urmare

$$z=\varphi(x^2+y^2)$$

unde φ este o funcţie arbitrară, derivabilă.

608. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=0,\qquad (a,b=\text{const.})$$

R. Considerăm sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}$$

Scanned with OKEN Scanner

care se reduce la o singură ecuație diferențială, cu soluția generală

$$bx - ay = C$$

Soluția generală a ecuației din enunț este

$$z = \varphi(bx - ay).$$

609. Să se integreze ecuația

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

R. Sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z^2}$$

admite combinațiile integrabile

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \qquad \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z^2} = 0$$

deci are integralele prime

$$\frac{y}{x} = c_1, \qquad \frac{1}{z} - \ln y = c_2$$

Soluția generală a ecuației date este așadar

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}, \ \frac{1}{z} - \ln y\right), \quad (x \neq 0, \quad y > 0, \quad z \neq 0)$$

610. Să se afle soluția generală a ecuației

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

R. Sistemul caracteristic asociat

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

admite combinația integrabilă

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

cu integrala primă

$$\frac{x}{y} = c_1$$

Pentru a mai determina o integrală primă observăm că putem scrie

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

iar dacă punem

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad x\,dx + y\,dy = r\,dr$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci obținem combinația integrabilă

$$dr = z\,dz$$

Integrăm și avem

$$2r - z^2 = c_2$$

sau înlocuind pe r

$$2\sqrt{x^2 + y^2} - z^2 = c_2$$

care este a doua integrală primă. Soluția generală a ecuației date este

$$u = \varphi\left(\frac{x}{y},\quad 2\sqrt{x^2 + y^2} - z^2\right)$$

611. Să se integreze ecuația

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

R. Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n}$$

Avem următoarele $n - 1$ integrale prime

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1,\quad \frac{x_2}{x_n} = c_2, \ldots,\quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}$$

Soluția generală a ecuației date este

$$u = \varphi\left(\frac{x_1}{x_n},\quad \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

adică o funcție arbitrară omogenă de gradul zero.

612. Să se afle soluția generală a ecuației

$$(z - y)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

R. Sistemul caracteristic care se asociază acestei ecuații este

$$\frac{dx}{(z - y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

Avem combinația integrabilă

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

care ne conduce la integrala primă

$$y^2 - z^2 = c_1$$

Scanned with OKEN Scanner

Putem de asemenea scrie succesiv

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{-(z-y)\,dy}{-z(z-y)} = \frac{(z-y)\,dz}{y(z-y)} = \frac{dx-(z-y)\,dy+(z-y)\,dz}{0}$$

de unde rezultă

$$dx-(z-y)\,dy+(z-y)\,dz=0$$

care se mai scrie sub forma

$$\frac{1}{2}\,d[2x+(z-y)^2]=0$$

Obținem deci integrala primă

$$2x+(z-y)^2=c_2$$

Soluția generală a ecuației din enunț este prin urmare

$$u=\varphi[y^2-z^2,\ 2x+(z-y)^2]$$

613. Să se integreze ecuația

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

R. Avem sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{x+y+z}$$

Din primele două rapoarte obținem integrala primă

$$\frac{x}{y}=c_1$$

Folosind această integrală primă, ultimele două rapoarte se scriu

$$\frac{dy}{y}=\frac{dz}{(1+c_1)\,y+z}$$

sau sub forma

$$\frac{dz}{dy}-\frac{1}{y}z-(1+c_1)=0$$

Am obținut astfel o ecuație diferențială liniară neomogenă de ordinul întîi, a cărei soluție generală este

$$\frac{z}{y}-(1+c_1)\ln y=c_2$$

Înlocuind pe c_1, rezultă integrala primă

$$\frac{z}{y}-\left(\frac{x}{y}+1\right)\ln y=c_2$$

Soluția generală a ecuației date este prin urmare

$$u=\varphi\left(\frac{x}{y},\ \frac{z}{y}-\frac{x+y}{y}\ln y\right),\quad (y>0)$$

Scanned with OKEN Scanner

614. Să se găsească soluția ecuației cu derivate parțiale

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

care îndeplinește condiția inițială: pentru $x=1$, avem $z=y+1$

R. Sistemul caracteristic este

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{2y}$$

cu integrala primă

$$\frac{y}{x^2}=C$$

Soluția generală este deci

$$z=\varphi\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

Soluția particulară se obține eliminînd pe x și y între relațiile

$$z=y+1,\quad x=1,\quad \frac{y}{x^2}=C$$

Rezultatul eliminării este relația

$$z=c+1$$

Înlocuind pe c cu $\frac{y}{x^2}$ găsim soluția problemei lui Cauchy

$$z=\frac{y}{x^2}+1,\quad (x,y)\in D\subset\mathbf{R}^2$$

unde D este un domeniu plan care nu întîlnește dreapta $x=0$.

615. Să se afle soluția particulară a ecuației

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

care satisface problema lui Cauchy: pentru $y=0$, avem $z=-x^2$.

R. Considerăm sistemul caracteristic

$$\frac{\mathrm{d}x}{x+y}=\frac{\mathrm{d}y}{x-y}$$

care se mai scrie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y}{x+y}$$

Avem o ecuație diferențială de ordinul întîi omogenă. Substituim

$$y(x)=xu(x),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația devine după efectuarea calculelor

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1+u)\,du}{1-2u-u^2}$$

deci o ecuație cu variabilele separate. Integrînd, obținem

$$x^2 - 2xy - y^2 = C$$

Soluția problemei lui Cauchy se obține eliminînd pe x și y între relațiile

$$y = 0, \quad z = -x^2, \quad x^2 - 2xy - y^2 = C$$

Relația care rezultă prin această eliminare este

$$z + c = 0$$

Eliminînd acum pe c între relațiile

$$x^2 - 2xy - y^2 = c, \quad z + c = 0$$

Obținem în definitiv soluția particulară căutată și anume

$$z = y^2 + 2xy - x^2.$$

616. Să se arate că funcția

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad (x \neq 0)$$

unde φ este o funcție arbitrară, derivabilă continuu de argumentul $u = \frac{y}{x}$, satisface ecuația cu derivate parțiale cvasiliniară

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

R. Avem succesiv

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(u) + x\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi - \frac{y}{x}\varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi',$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(\varphi - \frac{y}{x}\varphi'\right) + y\varphi' = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = z$$

de unde rezultă proprietatea enunțată.

617. Să se arate că ecuația cvasiliniară

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

este satisfăcută de funcția

$$z = y\cdot\varphi(x^2 - y^2)$$

unde φ este o funcție arbitrară, derivabilă continuu de argumentul $u = x^2 - y^2$.

Scanned with OKEN Scanner

R. Avem succesiv

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy\varphi'(u), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(u) + y\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi - 2y^2\varphi',$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\varphi' + \frac{1}{y}(\varphi - 2y^2\varphi') = \frac{1}{y}\varphi(x^2 - y^2) = \frac{z}{y^2},$$

de unde rezultă proprietatea din enunț.

618. Să se integreze ecuația cvasiliniară

$$(1 + \sqrt{x - y + z})\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

R. Asociem sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{x - y + z}} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{1}$$

Din ultimele două rapoarte obținem integrala primă

$$y - 2z = c_1$$

Avem apoi combinația integrabilă

$$\frac{dx - dy + dz}{\sqrt{x - y + z}} = \frac{dz}{1}$$

care ne furnizează a doua integrală primă

$$z - 2\sqrt{x - y + z} = c_2$$

Soluția generală a ecuației date este prin urmare

$$\varphi(y - 2z, \quad z - 2\sqrt{x - y + z}) = 0$$

unde φ este o funcție arbitrară.

619. Să se afle soluția generală a ecuației

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

R. Sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

admite combinațiile integrabile

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$$

cu integralele prime

$$\frac{y}{x} = c_1, \quad \frac{z}{x} = c_2$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția generală a ecuației date este așadar

$$\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$$

620. Să se integreze ecuația

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

R. Sistemul caracteristic este

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

Avem combinațiile integrabile

$$\frac{dx}{a} = \frac{dz}{1}, \qquad \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

care ne dau integralele prime

$$x - az = c_1, \qquad y - bz = c_2$$

Soluția generală a ecuației este

$$\varphi(x - az,\ y - bz) = 0$$

621. Să se găsească soluția generală a ecuației

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x^2} + \ldots + x_n\frac{\partial u}{x_n} = mu, \quad (m = \text{const.})$$

R. Asociem sistemul caracteristic

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots + \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{mu}$$

Avem integralele prime

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = c_2, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}, \quad \frac{u}{x_n^m} = c_n$$

Soluția generală este deci

$$\varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{u}{x_n^m}\right) = 0$$

Dacă explicităm pe $\frac{u}{x_n^m}$, obținem

$$u = x_n^m \cdot \psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

adică o funcție arbitrară, omogenă de gradul m.

Scanned with OKEN Scanner

622. Să se afle suprafața integrală a ecuației

$$(1 + \sqrt{z - x - y})\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

care trece prin curba

$$(\Gamma) \quad x = y, \quad z = 0$$

R. Sistemul diferențial asociat este

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$$

și admite combinațiile integrabile

$$2\,dy = dz, \quad \frac{dy}{1} = \frac{dz - dx - dy}{1 - \sqrt{z - x - y}}$$

cu integralele prime

$$z - 2y = c_1, \qquad y + 2\sqrt{z - x - y} = c_2$$

Soluția generală este

$$\varphi(z - 2y,\ y + 2\sqrt{z - x - y}) = 0$$

Pentru a găsi suprafața integrală căutată, eliminăm pe x, y, z din relațiile

$$x = y,\ z = 0, \qquad z - 2y = c_1, \qquad y + 2\sqrt{z - x - y} = 0$$

Rezultatul eliminării este relația

$$c_1 + 2c_2 = 0$$

Eliminăm apoi pe c_1, c_2 între relațiile

$$c_1 + 2c_2 = 0, \qquad z - 2y = c_1, \qquad y + 2\sqrt{z - x - y} = c_2$$

și obținem ecuația suprafeței integrale căutate

$$z + 4\sqrt{z - x - y} = 0$$

623. Să se găsească suprafața integrală a ecuației

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay, \quad (a, b, c = \text{const.})$$

care conține dreapta

$$(D) \quad x = y = z$$

R. Sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay}$$

are combinațiile integrabile

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0; \qquad x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

cu integralele prime

$$ax + by + cz = c_1, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția generală este

$$\varphi(ax + by + cz, \quad x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Eliminînd pe x, y, z între relațiile

$$x = y = z, \quad ax + by + cz = c_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

obținem următoarea relație între c_1, c_2

$$3c_1^2 = (a + b + c)^2 c_2$$

Eliminăm apoi pe c_1, c_2 între relațiile

$$3c_1^2 = (a + b + c)^2 c_2, \quad ax + by + cz = c_1, \quad c^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

și obținem ecuația suprafeței integrale căutate

$$3(ax + by + cz)^2 = (a + b + c)^2 (x^2 + y^2 + z^2)$$

care reprezintă o suprafață conică cu vîrful în origine.

624. Să se afle soluția ecuației cu derivate parțiale

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = u$$

care satisface condiția inițială: pentru $x_n = 1$, avem $u = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$

R. Sistemul caracteristic

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{u}$$

are integralele prime

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_1} = c_2, \ \ldots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}, \quad \frac{u}{x_n} = c_n$$

Soluția generală a ecuației este

$$\varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \ \frac{x_2}{x_n}, \ \ldots, \ \frac{x_{n-1}}{x_n}, \ \frac{u}{x_n}\right) = 0$$

Eliminăm acum pe $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ între relațiile

$$x_n = 1, \quad u = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}, \quad \frac{x_1}{x_n} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = c_2, \ \ldots, \ \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}, \quad \frac{u}{x_n} = c_n$$

și obținem următoarea relație între $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$c_n = c_1 c_2 \ldots c_{n-1}$$

Eliminăm apoi pe $c_1, c_2, \ldots, c_n$ între relațiile

$$c_n = c_1 c_2 \ldots c_{n-1}, \quad \frac{x_1}{x_n} = c_1, \ \ldots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}, \quad \frac{u}{x_n} = c_n$$

și obținem soluția problemei lui Cauchy

$$u = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n^{2-n}$$

pe orice interval $I \subset \mathbf{R}^n$ care nu conține puncte ale hiperplanului $x_n = 0$, pentru $n \geqslant 3$.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XVII

ELEMENTE DE TEORIA CÎMPURILOR

625. Să se calculeze gradientul următoarelor cîmpuri scalare:

1) $\varphi(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3x^2yz + z^3$,

2) $\varphi = xyz\, e^{x^2+y^2+z^2}$,

3) $\varphi = r^n$ unde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$

4) $\varphi = F(r^2)$

Folosim expresia gradientul

$$\operatorname{grad} \varphi = \vec{i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

de unde

1) $\operatorname{grad} \varphi = (3x^2 - 6xyz)\vec{i} + (3y^2 - 3x^2z)\vec{j} + (3z^2 - 3x^2y)\vec{k}$,

2) $\operatorname{grad} \varphi = e^{x^2+y^2+z^2}[yz(1 + 2x^2)\vec{i} + xz(1 + 2y^2)\vec{j} + xy(1 + 2z^2)\vec{k}]$

Ultimele exerciţii se rezolvă, ţinînd seama că

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \varphi'(r)\,\frac{\vec{r}}{r} \tag{1}$$

Avem deci

3) $\operatorname{grad} r^n = nr^{n-2}\,\vec{r}$

4) $\operatorname{grad} F(r^2) = 2F'(r^2)\,\vec{r}$

626. Se dă cîmpul,

$$\varphi = x^2 + y^3 + z^2 - 3xyz, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

Să se determine punctele $M \in \mathbf{R}^3$ pentru care vectorul grad φ este:

1) perpendicular pe axa Oy

2) paralel cu axa Ox

Avem mai întîi

$$\operatorname{grad} \varphi = (2x - 3yz)\vec{i} + (3y^2 - 3xz)\vec{j} + (2z - 3xy)\vec{k}$$

1) Scriind condiția de perpendicularitate între versorul axei Oy, $\vec{j}$ și grad φ obținem:

$$\vec{j} \cdot \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad \text{sau}$$

$$3(y^2 - xz) = 0$$

Punctele pentru care grad φ este perpendicular pe axa Oy se găsesc pe suprafața conică

$$y^2 = xz.$$

2) Vectorul grad φ este paralel cu axa Ox cînd componentele după Oy, Oz sînt nule, deci cînd punctele M aparțin ambelor suprafețe:

$$y^2 - xz = 0,$$

$$2z - 3xy = 0.$$

627. Să se calculeze gradientul pentru următoarele cîmpuri scalare:

1) $\varphi = \vec{c} \cdot \vec{r}$ unde $\vec{c}$ este un vector constant, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ iar $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ este vectorul de poziție.

2) $\varphi = (\vec{a} \cdot \vec{r})^5$ unde $\vec{a}$ este un vector constant.

Aplicăm formula:

$$d\varphi = \operatorname{grad} \varphi \cdot d\vec{r} \tag{1'}$$

1) Deoarece $d(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \vec{c} \cdot d\vec{r}$ din relația (1') rezultă:

$$\operatorname{grad}(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \vec{c}$$

2) $d(\vec{a} \cdot \vec{r})^5 = 5(\vec{a} \cdot \vec{r})^4 \; d(\vec{a} \cdot \vec{r}) = 5(\vec{a} \cdot \vec{r})^4 \, \vec{a} \cdot d\vec{r}$

Deci, din (1') se obține

$$\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r})^5 = 5(\vec{a} \cdot \vec{r})^4 \vec{a}$$

Observație. Cum

$$\operatorname{grad} \varphi(u) = \varphi'(u) \operatorname{grad} u \tag{2}$$

putem rezolva exercițiul precedent folosind relația (2), adică

$$\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r})^5 = \operatorname{grad} u^5 \quad \text{unde} \quad u = \vec{a} \cdot \vec{r} \quad \text{iar}$$

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}.$$

628. Se dau cîmpurile scalare:

1) $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$

2) $\varphi(\vec{r}) = (\vec{a} \cdot \vec{r})^3$ unde $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ este un vector constant, iar $\vec{r}$ vectorul de poziție.

3) $\varphi = \frac{1}{r^2} \ln r, \qquad r \neq 0, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

Scanned with OKEN Scanner

Să se calculeze derivata acestora după direcțiile

$$\vec{\lambda}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{\lambda}_2 = 2\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Știm că avem:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{s} \cdot \operatorname{grad} \varphi. \tag{3}$$

1) $\operatorname{grad} \varphi = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} = 2\vec{r}.$

$$\vec{s}_1 = \frac{\vec{\lambda}_1}{|\vec{\lambda}_1|} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}, \tag{4}$$

$$\vec{s}_2 = \frac{\vec{\lambda}_2}{|\vec{\lambda}_2|} = \frac{2\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{4 + 3 + 9}} = \frac{2\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + 3\vec{k}}{4}, \tag{4'}$$

deci

$$\frac{d\varphi}{ds_1} = \vec{s}_1 \cdot \operatorname{grad} \varphi = (2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}) \cdot \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3},$$

sau

$$\frac{d\varphi}{ds_1} = \frac{2x + 4y + 4z}{3}$$

$$\frac{d\varphi}{ds_2} = \vec{s}_2 \cdot \operatorname{grad} \varphi = (2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}) \cdot \frac{2\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + 3\vec{k}}{4},$$

de unde

$$\frac{d\varphi}{ds_2} = \frac{4x + 2\sqrt{3}y + 6z}{4}.$$

2) Aplicînd formula (2), avem:

$$\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r})^3 = 3(\vec{a} \cdot \vec{r})^2 \operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = 3(\vec{a} \cdot \vec{r})^2 \vec{a}$$

sau

$$\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r})^3 = 3(\vec{a} \cdot \vec{r})^2 (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \tag{5}$$

Din relațiile (3), (4), (5) avem:

$$\frac{d\varphi}{ds_1} = \vec{s}_1 \cdot \operatorname{grad} \varphi = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3} \cdot 3(\vec{a} \cdot \vec{r})^2 \vec{a}$$

sau

$$\frac{d\varphi}{ds_1} = (\vec{a} \cdot \vec{r})^2 (a_1 + 2a_2 + 2a_3)$$

Aplicînd relațiile (3), (4'), (5), urmează

$$\frac{d\varphi}{ds_2} = \vec{s}_2 \cdot \operatorname{grad} \varphi = \frac{2\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + 3\vec{k}}{4} 3(\vec{a} \cdot \vec{r})^2 (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})$$

adică

$$\frac{d\varphi}{ds_2} = \frac{3}{4} (\vec{a} \cdot \vec{r})^2 (2a_1 + \sqrt{3}\, a_2 + 3a_3)$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Ţinînd seama de (1), avem:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^2}\ln r\right)=\left(\frac{1}{r^3}-\frac{2}{r^3}\ln r\right)\frac{\vec{r}}{r}=\frac{1}{r^4}(1-2\ln r)\vec{r},$$

deci (4)

$$\frac{d\varphi}{ds_1}=\vec{s}_1\cdot\operatorname{grad}\varphi=\frac{\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}}{3}\cdot\frac{1}{r^4}(1-2\ln r)\vec{r}$$

sau

$$\frac{d\varphi}{ds_1}=\frac{1-2\ln r}{3r^4}(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})\cdot(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}),$$

adică

$$\frac{d\varphi}{ds_1}=\frac{1-2\ln r}{3r^4}(x+2y+2z),\qquad r\neq 0.$$

Procedînd la fel, din (4'), urmează:

$$\frac{d\varphi}{ds_2}=\vec{s}_2\cdot\operatorname{grad}\varphi=\frac{2\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}+3\vec{k}}{4}\cdot\frac{1-2\ln r}{r^4}\vec{r},$$

de unde

$$\frac{d\varphi}{ds_2}=\frac{1-2\ln r}{4r^4}(2\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}+3\vec{k})(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

sau

$$\frac{d\varphi}{ds_2}=\frac{(1-2\ln r)(2x+\sqrt{3}y+3z)}{4r^4},\qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\qquad (r\neq 0).$$

629. Se dă cîmpul scalar

$$\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\qquad (x,y,z)\in\mathbf{R}^3$$

1) Să se calculeze derivata acestuia după direcţia OM, unde O este originea axelor iar $M(x,y,z)$: caz particular $M(1,2,2)$.

2) Care-i suprafaţa de nivel ce trece prin punctul $M(1,0,-1)$

1) $\dfrac{d\varphi}{ds}=\vec{s}\cdot\operatorname{grad}\varphi$

unde

$$\vec{s}=\frac{\vec{r}}{r},\qquad \text{deoarece}\quad \overrightarrow{OM}=\vec{r}$$

deci

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\vec{r}}{r}\cdot(2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k})=\frac{\vec{r}}{r}\cdot 2\vec{r}=2\frac{r^2}{r}=2r.$$

Avem astfel

$$\frac{d\varphi}{ds}=2r.$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivata funcției φ în punctul M(1, 2, 2), după direcția dată este:

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_M = 2r_M = 2\left.\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right|_M = 2\sqrt{1^2+2^2+2^2} = 6,$$

deci

$$\left.\frac{d\varphi}{ds}\right|_M = 6.$$

2) Ecuația suprafeței de nivel, corespunzătoare cîmpului scalar $\varphi(x, y, z)$ ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0). \tag{6}$$

Ținînd seama de această relație, avem

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$$

sau

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

Suprafața de nivel ce trece prin punctul M_0 este o sferă cu centrul în origine și rază $\sqrt{2}$.

630. Fiind dat cîmpul scalar

$$\varphi = (\vec{a} \times \vec{r})\,(\vec{b} \times \vec{r})$$

unde $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

sînt doi vectori constanți, să se determine suprafața de nivel ce trece prin originea axelor.

Cîmpul scalar φ se poate scrie sub forma:

$$\varphi = (\vec{a} \times \vec{r})\,(\vec{b} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{r} \\ \vec{b}\cdot\vec{r} & r^2 \end{vmatrix} = (\vec{a}\cdot\vec{b})\,r^2 - (\vec{a}\cdot\vec{r})\,(\vec{b}\cdot\vec{r})$$

sau

$$\varphi(x, y, z) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,(x^2 + y^2 + z^2) - \\ - (a_1x + a_2y + a_3z)\,(b_1x + b_2y + b_3z)$$

de unde (6) suprafața de nivel respectivă are ecuația

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,(x^2 + y^2 + z^2) - \\ - (a_1x + a_2y + a_3z)\,(b_1x + b_2y + b_3z) = 0$$

631. Se dă cîmpul vectorial

$$\vec{V} = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} - 2z\vec{k}, \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine:

1) *Liniile de cîmp,*

2) *Linia de cîmp ce trece prin punctul* M $(1, 0, 1)$,

3) *Suprafețele de cîmp*

4) *Suprafața de cîmp ce conține dreapta*

$$\begin{cases} z = 1, \\ y - \sqrt{3}x = 0. \end{cases}$$

1) Sistemul simetric din a cărui rezolvare rezultă ecuațiile liniilor de cîmp este

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{-2z}.$$

Folosind metoda combinațiilor integrabile avem:

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = \frac{dz}{-2z}$$

sau

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{dz}{z}$$

de unde rezultă integrala primă

$$(x^2+y^2)z = C_1$$

Din primele două rapoarte urmează

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x},$$

care-i o ecuație diferențială omogenă, ce se rezolvă efectuînd schimbarea de funcție $y = t \cdot x$

Avem

$$x\,\frac{dt}{dx} + t = \frac{t-1}{t+1}$$

sau

$$x\,\frac{dt}{dx} = -\frac{1+t^2}{t+1} \longrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{t+1}{t^2+1}\,dt,$$

de unde

$$\ln(x^2+y^2) + 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C_2$$

Astfel liniile de cîmp au ecuațiile:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)\,z = C_1 \\ \ln(x^2+y^2) + 2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C_2 \qquad x^2+y^2 \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

2) Scriind că punctul $M(1, 0, 1)$ aparţine liniei de cîmp, obţinem, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, deci

$$(x^2 + y^2)z = 1$$

$$\ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0, \qquad x \neq 0,$$

reprezintă ecuaţiile liniei de cîmp ce trece prin punctul $M(1, 0, 1)$

3) Ecuaţia suprafeţelor de cîmp este

$$\Phi\left[(x^2 + y^2)\, z, \quad \ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right] = 0, \qquad x \neq 0$$

unde Φ este o funcţie *arbitrară*.

4) Suprafaţa de cîmp ce conţine dreapta Γ rezultă din eliminarea lui x, y, z între ecuaţiile dreptei Γ şi ecuaţiile liniilor de cîmp respective, adică din:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)z = C_1, \\ \ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = C_2, \\ z = 1, \\ y - \sqrt{3}\, x = 0. \end{cases}$$

Eliminînd x, y, z între ecuaţiile precedente se obţine

$$\ln C_1 + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{3} = C_2$$

şi ţinînd seamă de (7) rezultă

$$z = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{\pi}{3}}, \qquad x \neq 0,$$

care reprezintă ecuaţia suprafeţei de cîmp ce conţine dreapta Γ.

632. Se dă cîmpul

$$\vec{V} = \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g$$

unde

$$f = (x + y + z)^2, \qquad f \neq 0,$$
$$g = xy + yz + xz.$$

Să se determine:

1) Liniile de cîmp.

2) Suprafaţa de cîmp ce trece prin curba

$$\Gamma \begin{cases} z = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

1) $\operatorname{grad} f = 2(x + y + z)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 2\bar{f}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), \qquad \bar{f} = \sqrt{f}$

$\operatorname{grad} g = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$

$$\vec{V} = \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\bar{f} & 2\bar{f} & 2\bar{f} \\ y + z & x + z & x + y \end{vmatrix}$$

de unde

$$\vec{V} = 2\bar{f}[(y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}]$$

Liniile de cîmp rezultă din rezolvarea sistemului simetric

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$$

care admite integralele prime

$$\begin{aligned} x + y + z &= C_1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= C_2, \end{aligned} \tag{8}$$

deci liniile de cîmp sînt cercuri.

2) Suprafața de cîmp ce trece prin curba Γ rezultă din eliminarea lui x, y, z între relațiile

$$\begin{cases} x + y + z = C_1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2, \\ z = 0, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Rezultatul eliminării este relația

$$C_1^2 = C_2 + 4.$$

Ținînd seama de (8), în relația precedentă avem suprafața de cîmp respectivă, de ecuație

$$xy + xz + yz = 2$$

633. Se dă cîmpul

$$\vec{V} = \operatorname{grad}(x^2y^2z^2), \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

Se cer:

1) Liniile de cîmp.
2) Suprafața de cîmp ce trece prin cercul

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

1) $\vec{V} = 2xyz(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}), \qquad xyz \neq 0.$

Liniile de cîmp rezultă din rezolvarea sistemului simetric

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$$

care admite integralele prime:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= C_1, \\ y^2 - z^2 &= C_2, \end{aligned} \tag{9}$$

și deci liniile de cîmp rezultă din intersecția suprafețelor respective.

Scanned with OKEN Scanner

2) Suprafața de cîmp ce trece prin cercul Γ se obține din eliminarea variabilelor x, y, z între relațiile:

$$x^2 - y^2 = C_1,$$
$$y^2 - z^2 = C_2,$$
$$z = 0,$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

și rezultă relația

$$C_1 + 2C_2 = 4.$$

Din (9) obținem suprafața respectivă, de ecuație

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 4$$

634. Se dau cîmpurile vectoriale:

1) $\vec{V} = (x^2 - yz)\vec{i} + (xy - z^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)z\vec{k}$,

2) $\vec{V} = \varphi(r)\vec{a}$, $\vec{a}$ vector constant,

3) $\vec{V} = (\vec{a} \cdot \vec{r})\ \vec{a}$, $\vec{a}$ vector constant iar $\vec{r}$ vectorul de poziție,

4) $\vec{V} = \mathrm{F}(\vec{a} \times \vec{r})$ unde $\vec{\mathrm{F}} = |\vec{a} \times \vec{r}|^2$,

5) $\vec{\mathrm{V}} = \varphi(r)\vec{r}$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$

Să se calculeze divergența și rotorul acestor cîmpuri vectoriale. Dacă

$$\vec{V} = \mathrm{X}(x, y, z)\vec{i} + \mathrm{Y}(x, y, z)\vec{j} + \mathrm{Z}(x, y, z)\vec{k}\ (x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3$$

atunci avem formulele:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z} \tag{10}$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\right) \tag{10'}$$

1) Aplicînd formulele (10), (10') se obține:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 3x + x^2 + y^2$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = 2z(1 + y)\vec{i} - (y + 2xz)\vec{j} + (y + z)\vec{k}$$

2) Se știe că:

$$\operatorname{div} \varphi\vec{V} = \varphi \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \varphi \tag{11}$$

$$\operatorname{rot} \varphi\vec{V} = \varphi \operatorname{rot} \vec{V} - \vec{V} \times \operatorname{grad} \varphi \tag{12}$$

$$\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} \tag{12'}$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem:

$$\operatorname{div} \varphi(r)\vec{a} = \varphi(r) \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi(r)$$

Deoarece $\vec{a}$ este vector constant, $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ și ținînd seama de relația (1), avem:

$$\operatorname{div} \varphi(r)\vec{a} = \vec{a} \cdot \varphi'(r) \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\varphi'(r)}{r} \vec{a} \cdot \vec{r}$$

deci

$$\operatorname{div} \varphi(r)\vec{a} = \frac{\varphi'(r)}{r} \vec{a} \cdot \vec{r}$$

Aplicînd formula (12) și (1) avem

$$\operatorname{rot} \varphi(r)\vec{a} = \varphi(r) \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \times \operatorname{grad} \varphi(r) = \varphi(r) \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \times \varphi'(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Cum $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ ($\vec{a}$ constant), rămîne

$$\operatorname{rot} \varphi(r)\vec{a} = -\frac{\varphi'(r)}{r} (\vec{a} \times \vec{r}) = \frac{\varphi'(r)}{r} (\vec{r} \times \vec{a})$$

3) Din (11) urmează

$$\operatorname{div}(\vec{a} \cdot \vec{r})\, \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{r}) \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

deoarece $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ ($\vec{a}$ constant), iar $\operatorname{grad} \vec{a} \cdot \vec{r} = \vec{a}$.
Deci

$$\operatorname{div}(\vec{a} \cdot \vec{r})\, \vec{a} = a^2$$

Ținînd seama de formula (12), rezultă

$$\operatorname{rot}(\vec{a} \cdot \vec{r})\, \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{r}) \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \times \operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = (\vec{a} \cdot \vec{r}) \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \times \vec{a}$$

Dar, $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ ($\vec{a}$ constant) și $\vec{a} \times \vec{a} = 0$, deci $\operatorname{rot}(\vec{a} \cdot \vec{r})\, \vec{a} = 0$

4) Din (11), avem

$$\operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{div} \mathrm{F}(\vec{a} \times \vec{r}) = \mathrm{F} \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \times \vec{r}) \operatorname{grad} \mathrm{F} \qquad (13)$$

Dar

$$\operatorname{grad} \mathrm{F} = \operatorname{grad}(\vec{a} \times \vec{r})^2 = \operatorname{grad}(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot (\vec{a} \times \vec{r})$$

Aplicînd formula (1), avem

$$\mathrm{dF} = \mathrm{d}(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot (\vec{a} \times \vec{r}) = (\vec{a} \times \vec{\mathrm{d}r}) \cdot (\vec{a} \times \vec{r}) + (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot (\vec{a} \times \vec{\mathrm{d}r}),$$

sau

$$\mathrm{dF} = 2(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot (\vec{a} \times \vec{\mathrm{d}r})$$

Notînd $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{r}$, avem produsul mixt

$$\mathrm{dF} = 2\vec{u}\, (\vec{a} \times \vec{\mathrm{d}r})$$

Dar într-un produs mixt se pot interverti înmulțirea scalară cu cea vectorială, valoarea acestuia rămînînd neschimbată, deci

$$\mathrm{dF} = 2(\vec{u} \times \vec{a}) \cdot \vec{\mathrm{d}r}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind expresia lui $\vec{u}$, rezultă

$$dF = 2(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Ținînd seama de formula (1'), urmează

$$\text{grad } F = 2(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{a} \tag{14}$$

Expresia (13) se scrie

$$\text{div } \vec{V} = F \text{ div}(\vec{a} \times \vec{r}) + 2(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot [(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{a}]$$

Cum (12') $\text{div}(\vec{a} \times \vec{r}) = 0$ iar produsul mixt $(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot [(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{a}]$ este nul avînd doi vectori egali, avem

$$\text{div} \, |\vec{a} \times \vec{r}|^2 (\vec{a} \times \vec{r}) = 0$$

Ținînd seama de formula (12), se poate scrie

$$\text{rot} \, |\vec{a} \times \vec{r}|^2 (\vec{a} \times \vec{r}) = |\vec{a} \times \vec{r}|^2 \text{ rot}(\vec{a} \times \vec{r}) + \text{grad} \, |\vec{a} \times \vec{r}|^2 \times (\vec{a} \times \vec{r}) \tag{15}$$

Cum

$$\vec{a} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_2 z - a_3 y) + \vec{j}(a_3 x - a_1 z) + \vec{k}(a_1 y - a_2 x),$$

dacă se ține seamă de (10') avem

$$\text{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = \vec{i}(a_1 + a_1) + \vec{j}(a_2 + a_2) + \vec{k}(a_3 + a_3) = 2\vec{a}$$

sau

$$\text{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = 2\vec{a} \tag{16}$$

Din (14), (16), relația (15) devine

$$\text{rot} \, |\vec{a} \times \vec{r}|^2 (\vec{a} \times \vec{r}) = 2 |\vec{a} \times \vec{r}|^2 \vec{a} + 2 [(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{a}] \times (\vec{a} \times \vec{r}).$$

5) Din formula (11), avem

$$\text{div } \varphi(r)\vec{r} = \varphi(r) \text{ div } \vec{r} + \vec{r} \text{ grad } \varphi(r)$$

Dar (10), $\text{div } \vec{r} = 3$, iar $\text{grad } \varphi(r) = \varphi'(r) \frac{\vec{r}}{r}$,

deci

$$\text{div } \varphi(r)\vec{r} = 3\varphi(r) + \vec{r} \cdot \varphi'(r) \frac{\vec{r}}{r} = 3\varphi(r) + r\varphi'(r).$$

Aplicînd formula (12) rezultă

$$\text{rot } \varphi(r)\vec{r} = \varphi(r) \text{ rot } \vec{r} - \vec{r} \times \text{grad } \varphi(r) = \varphi(r) \text{ rot } \vec{r} - \vec{r} \times \varphi'(r) \frac{\vec{r}}{r} = 0$$

deoarece (10') $\text{rot } \vec{r} = 0$, iar $\vec{r} \times \vec{r} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

635. Se dă cîmpul

$$\vec{V} = (2x - \sin x)\vec{i} - 2y\vec{j} + 4z\vec{k},$$
$$(x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

1) Să se calculeze rot $\vec{V}$

2) Să se determine potențialul scalar $\varphi(x, y, z)$.

1) Aplicînd formula (10') rezultă, rot $\vec{V} = e$.

2) Potențialul scalar $\varphi(x, y, z)$ există, și este dat de integrala curbilinie (care nu depinde de drumul de integrare)

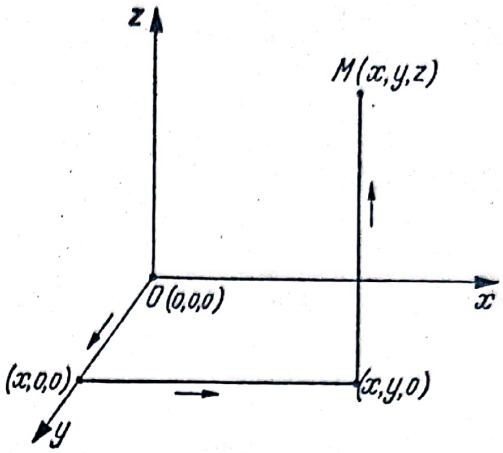

Fig. 67

$$\varphi(x, y, z) = \int_{AM} \vec{V} \cdot \vec{dr}$$

sau

$$\varphi(x, y, z) = \int_{AM} (2x - \sin x)\,dx - 2y\,dy + 4z\,dz$$

unde A este un punct fix iar M un punct oarecare variabil.

Deoarece integrala curbilinie nu depinde de drum, integrăm pe un drum paralel cu axele ca în fig. 67, avem

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^x (2x - \sin x)\,dx + \int_0^y (-2y)\,dy + 4\int_0^z z\,dz =$$
$$= x^2 + \cos x - y^2 + 2z^2 + C$$

deci potențialul scalar este

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + \cos x - y^2 + 2z^2 + C, \quad \text{iar } \vec{V} = \operatorname{grad} \varphi.$$

636. Fiind dat cîmpul

$$\vec{V} = r^n\vec{r}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție, iar $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, se cere:

1) Să se determine potențialul scalar φ,

2) Să se calculeze circulația vectorului $\vec{V}$ pe curba

$$\Gamma\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Ca și în problema (10) avem mai întîi

$$\operatorname{rot}(r^n\vec{r}) = 0,$$

deci cîmpul respectiv este un cîmp de gradienți, iar potențialul scalar φ rezultă din

$$\varphi = \int_{AM} \vec{V} \cdot \vec{dr} = \int_{AM} r^n \cdot \vec{r} \cdot \vec{dr}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $\vec{r}\cdot\vec{dr} = x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr$, avem

$$\varphi = \int_{AM} r^n r\,dr = \int_{AM} r^{n+1}dr = \frac{r^{n+2}}{n+2}\Big|_A^M = \frac{r^{n+2}}{n+2} + C$$

Deci potențialul scalar este

$$\varphi(r) = \frac{r^{n+2}}{n+2} + C.$$

Se observă că dacă aplicăm (1) rezultă că

$$\operatorname{grad}\frac{r^{n+2}}{n+2} = r^n\vec{r} = \vec{V}.$$

2) Scriind formula lui Stokes,

$$\oint_\Gamma \vec{V}\cdot\vec{dr} = \iint_S \vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{V}\,d\sigma \tag{17}$$

Deoarece

$$\operatorname{rot}(r^n\vec{r}) = 0$$

avem

$$\oint_\Gamma \vec{V}\cdot\vec{dr} = 0, \quad \text{unde } \vec{V} = r^n\vec{r}.$$

Astfel, circulația vectorului $\vec{V} = r^n\vec{r}$ pe curba închisă Γ este egală cu 0.

637. Se dă cîmpul

$$\vec{V} = 2x\varphi(x)\vec{i} - y\varphi(x)\vec{j} + 6z^2\vec{k}, \qquad (x, y, z)\in\mathbf{R}^3.$$

Să se determine funcția $\varphi(x)$ astfel încît cîmpul să fie solenoidal.

Cîmpul este solenoidal dacă $\operatorname{div}\vec{V} = 0$, cum

$$\operatorname{div}\vec{V} = 2x\varphi'(x) + \varphi(x) + 6x^2$$

funcția $\varphi(x)$ este soluția generală a ecuației diferențiale liniare de ordinul întîi

$$\varphi'(x) + \frac{1}{2x}\varphi(x) = -3x,$$

de unde

$$\varphi(x) = e^{-\int\frac{1}{2x}dx}\left[C - 3\int e^{\frac{1}{2x}dx}x\,dx\right],$$

adică

$$\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} - \frac{6}{5}x^2, \qquad x > 0.$$

638. Fie cîmpul vectorial

$$\vec{V} = (\vec{a}\times\vec{r})\,\varphi(r) + (\vec{a}\cdot\vec{r})\,\vec{a}, \quad \vec{a} \text{ vector constant.}$$

Să se calculeze fluxul acestui vector prin suprafața sferică de rază R.

Scanned with OKEN Scanner

Se aplică formula lui Gauss-Ostrogradski,

$$\oiint_S \vec{n}\cdot\vec{V}\,d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{V}\,d\omega \tag{18}$$

Dar din (11),

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{r})\,\varphi(r) = \varphi(r)\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{r}) + \operatorname{grad}\varphi(r)\cdot(\vec{a}\times\vec{r})$$

Din (12')

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{r}) = \vec{r}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{r} = 0$$

deoarece $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ ($\vec{a}$ constant), $\operatorname{rot}\vec{r} = 0$.

Din (1),

$$\operatorname{grad}\varphi(r)\cdot(\vec{a}\times\vec{r}) = \varphi'(r)\frac{\vec{r}}{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{r}) = 0,$$

produsul mixt $\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{r}) = 0$, avînd doi factori egali.
Deci

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{r})\,\varphi(r) = 0.$$

Din problema 10, rezultă că

$$\operatorname{div}(\vec{a}\cdot\vec{r})\,\vec{a} = a^2.$$

Ţinînd seama de acestea în (18), avem

$$\iint_S \vec{n}\cdot\vec{V}\,d\sigma = \iiint_\Omega a^2\,d\omega = a^2\iiint_\Omega d\omega = a^2\cdot\text{vol sferei}.$$

Astfel

$$\iint_S \vec{n}\cdot\vec{V}\,d\sigma = a^2\cdot\frac{4\pi R^3}{3}.$$

639. Să se calculeze circulaţia vectorului

$$\vec{V} = \vec{a}\times\vec{r}$$

unde $\vec{a} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ (vectorul de poziţie) pe curba

$$\Gamma\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x=0,\ y=0,\ z=0\ \ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0) \end{cases}$$

Curba fiind închisă (fig. 68) aplicînd formula lui Stokes (17), avem (16)

$$\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{r}) = 2\vec{a}$$

şi dacă ecuaţia suprafeţei S este de forma

$$F(x,y,z) = 0 \tag{19}$$

atunci versorul normalei la această suprafaţă este

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} F}{\pm|\operatorname{grad} F|} \tag{20}$$

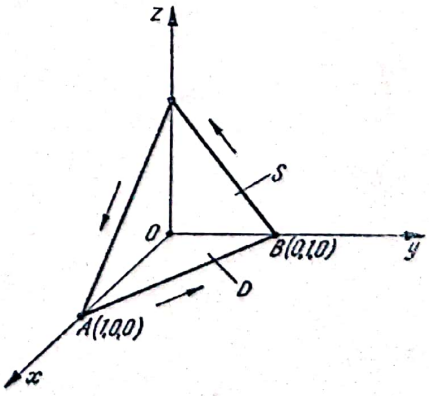

Fig. 68

În această problemă ecuația suprafeței S este

$$x + y + z - 1 = 0 \tag{21}$$

deci versorul normalei la suprafața orientată (fig. 68) respectivă este

$$\vec{n} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{3}}$$

Ținînd seama de acestea în formula lui Stokes (17), rezultă

$$\oint_\Gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \frac{\vec{a}}{\sqrt{3}} \cdot 2\vec{a}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{2a^2}{\sqrt{3}} \iint_S \mathrm{d}\sigma; \tag{21'}$$

Dar

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{22}$$

unde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \text{iar din (21), avem}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{3}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

deci (fig. 68) $\iint_S \mathrm{d}\sigma = \iint_D \sqrt{3}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sqrt{3} \iint_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sqrt{3}$ aria $D = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Înlocuind în (21') se obține

$$\oint_\Gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = a^2 = 3.$$

Observație. Același rezultat se obține și prin calcul direct, unde

$$\vec{a} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}(z - y) + \vec{j}(x - z) + \vec{k}(y - x)$$

Avem (fig 68)

$$\oint_\Gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{AB} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{BC} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{CA} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Dar

$$\int_{AB} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{AB} (z - y)\, \mathrm{d}x + (x - z)\, \mathrm{d}y + (y - x)\, \mathrm{d}z$$

unde

$$AB \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \mathrm{d}z = 0 \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x \end{matrix}$$

Astfel

$$\int_{AB} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_1^0 (x - 1)\, \mathrm{d}x + x(-\mathrm{d}x) = -\int_1^0 \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

La fel se arată că

$$\int_{BC} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 1, \quad \int_{CA} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 1$$

și deci

$$\int_{AB} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 3$$

640. Se dă cîmpul vectorial:

$$\vec{V} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k},$$

să se calculeze circulația acestui vector pe curba

$$\Gamma \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases} \qquad (z \geqslant 0)$$

Aplicînd formula (11), avem

$$\operatorname{rot} \vec{V} = 2(y - z)\vec{i} + 2(z - x)\vec{j} + 2(x - y)\vec{k},$$

cum versorul normalei la suprafața sferei este

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{a}, \quad (\vec{r} = xi + yj + zk)$$

rezultă

$$\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{V} = \frac{2}{a}[x(y - z) + y(z - x) + z(x - y)] = 0$$

Ținînd seamă de acest rezultat în formula lui Stokes (17) avem

$$\oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

641. Fie cîmpul

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

să se calculeze fluxul acestui vector prin suprafața sferică

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0),$$

unde

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{a} \ (\vec{r} \text{ vector de poziție}).$$

$$\Phi = \iint_S \vec{n} \cdot \vec{V}\, \mathrm{d}\sigma = \iint_S \frac{\vec{r}}{a} \cdot \vec{r}\, \mathrm{d}\sigma = \iint_S \frac{r^2}{a}\, \mathrm{d}\sigma = a \iint_S \mathrm{d}\sigma$$

de unde

$$\Phi = a \cdot \frac{4\pi a^2}{8} = \frac{\pi a^3}{2}$$

deoarece

$$\iint_S \mathrm{d}\sigma = \text{aria suprafeței } S.$$

Scanned with OKEN Scanner

642. Se dă cîmpul vectorial

$$\vec{V} = (y^2 + 3z^3)\vec{i} + (x^3 - 4z^2)\vec{j} + 3z\vec{k},$$

să se calculeze fluxul acestui vector prin suprafața *închisă* ce mărginește un elipsoid.

Deoarece (10),

$$\operatorname{div} \vec{V} = 3$$

aplicînd formula (18), avem

$$\Phi = \iiint_{\Omega} 3 \, d\omega = 3 \cdot \text{vol elipsoid}$$

Deci

$$\Phi = 4\pi abc$$

643. Fie cîmpul vectorial

$$\vec{V} = z\vec{k}$$

Să se calculeze fluxul acestui vector prin suprafața

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 4 = 0 \qquad (z > 0),$$

normala $\vec{n}$ făcînd un unghi ascuțit cu axa Oz (fig. 69)

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} F}{\pm |\, F \operatorname{grad} |} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{-\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k},$$

$$\vec{n} \cdot \vec{V} = \frac{z}{+\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}},$$

$$\Phi = \iint_S \vec{n} \cdot \vec{V} \, d\sigma = \iint_S \frac{z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \, d\sigma = \iint_S z \, dx \, dy,$$

deoarece

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Dar,

$$\iint_S z \, dx \, dy = \iint_D (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy$$

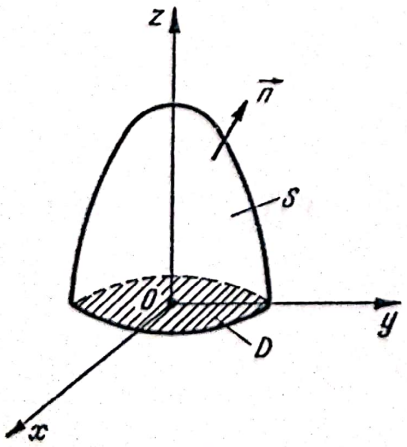

Fig. 69

Trecînd la coordonate polare

$$x = \rho \cos\theta, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant 2$$
$$y = \rho \operatorname{xin} \theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

avem

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \iint_D (4 - \rho^2) \, \rho \, d\rho \, d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4\rho - \rho^3) \, d\rho = 8\pi.$$

Deci

$$\Phi = 8\pi.$$

644. Se dă cîmpul vectorial

$$\vec{V} = \psi \operatorname{grad} \varphi \times \varphi \operatorname{grad} \psi, \qquad (x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3,$$

unde funcțiile $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, a, z)$, au derivate parțiale de ordinul doi continue în D.

Să se calculeze fluxul acestui vector printr-o suprafață închisă situată în D.

Din formulele (12), (12'), avem

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= \varphi \operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{rot}(\psi \operatorname{grad} \varphi) - \psi \operatorname{grad} \varphi \operatorname{rot}(\varphi \operatorname{grad} \psi) = \\ &= \varphi \operatorname{grad} \psi \cdot (\psi \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi \times \operatorname{grad} \varphi) - \\ &- \psi \operatorname{grad} \varphi \cdot (\varphi \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi = 0 \end{aligned}$$

deoarece

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = 0$$

iar produsele mixte

$$\operatorname{grad} \psi \cdot (\operatorname{grad} \psi \times \operatorname{grad} \varphi), \quad \operatorname{grad} \varphi \cdot (\operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi)$$

sînt nule avînd doi factori identici.

Aplicînd formula lui Gauss-Ostrogradski (18), rezultă

$$\Phi = 0, \quad \text{deoarece } \operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XVIII

ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR

645. O urnă conține a bile albe și b bile negre.

1) Se efectuează succesiv n extracții, punîndu-se de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă.

Care este probabilitatea ca în aceste n extracții să avem de k ori bila albă?

2) Se extrag succesiv k bile, fără a se pune bila extrasă înapoi în urnă. Să se determine probabilitatea ca toate bilele extrase să fie albe.

Caz particular $a = 75$, $b = 25$, $k = 10$.

1) Aplicăm formula lui Bernoulli,

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{1}$$

unde

$$p = \frac{a}{a+b}, \qquad q = 1 - p = \frac{b}{a+b}$$

2) Notînd cu $P_k(r, s)$ probabilitatea ca din cele k bile extrase r să fie albe și s să fie negre, ținînd seamă de definiția clasică a probabilității, avem

$$P_k(r, s) = \frac{C_a^r C_b^s}{C_{a+b}^k} \tag{2}$$

Cum $r = k$ iar $s = 0$, rezultă

$$P_k(k, 0) = \frac{C_a^k C_b^0}{C_{a+b}^k} = \frac{C_a^k}{C_{a+b}^k}$$

Caz particular

$$P_{10}(10, e) = \frac{C_{75}^{10}}{C_{100}^{10}}$$

646. 1) Se aruncă n monede identice, care este probabilitatea de a obține de k ori stema?

2) Să se rezolve aceeași problemă pentru cazul cînd se aruncă o monedă de n ori.

3) Caz particular $n = 50$, $k = 15$.

Scanned with OKEN Scanner

Atît în cazul 1) cît și în cazul 2) probabilitatea este dată de formula (1).

3) $$P_{50}(15) = C_{50}^{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{50-15} = C_{50}^{15}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$$

647. Într-un număr de 1000 lozuri, 10 sînt cîștigătoare; se cumpără 20 lozuri.

Care este probabilitatea de a avea;
1) două lozuri cîștigătoare;
2) patru lozuri cîștigătoare.
— Aplicăm formula (2) și obținem

1) $$P_{20}(2,18) = \frac{C_{10}^{2}\, C_{990}^{18}}{C_{1000}^{20}}$$

2) $$P_{20}(4,16) = \frac{C_{10}^{4}\, C_{990}^{16}}{C_{1000}^{20}}$$

648. Se aruncă de n ori un zar, care este probabilitatea de a avea:
1) fața 6 o singură dată?
2) fața 6 cel puțin odată? De cîte ori trebue să aruncăm cu zarul pentru a avea fața 6 cel puțin odată cu o probabilitate mai mare ca $\frac{1}{3}$?

— 1) Aplicînd formula (1) avem

$$P_n(1) = C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = C_n^1\,\frac{1}{2^n}$$

2) Notînd cu A evenimentul care constă în apariția feței 6 la o aruncare cu zarul și cu $\bar{A}$ evenimentul contrar, avem

$$P(A) = \frac{1}{6}, \qquad P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$$

Dacă A_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ reprezintă evenimentul că fața 6 nu a apărut la aruncarea i, atunci

$$\bar{B} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n$$

reprezintă evenimentul că fața respectivă nu a apărut la niciuna din cele n aruncări iar evenimentul care-l urmărim este B.

Deci

$$P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n,$$

$$P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

— Punînd condiția ca $P(B) > \frac{1}{3}$, avem

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{3} \longrightarrow n > \frac{\lg 3 - \lg 2}{\lg 6 - \lg 5} \approx 2,2$$

Deci

$$n \geqslant 3.$$

Scanned with OKEN Scanner

649. *Se trage asupra unei ţinte.*

1) Dacă un trăgător loveşte ţinta cu probabilitatea p, care este probabilitatea ca din cele n trageri să lovească ţinta de k ori?

2) Trăgînd asupra aceleiaşi ţinte doi trăgători, trăgătorul 1 lovind ţinta cu probabilitatea p_1, iar trăgătorul 2 lovind ţinta respectivă cu probabilitatea p_2, să se determine probabilitatea ca ţinta să fie atinsă.

3) Dacă asupra ţintei trag n trăgători, trăgătorul i lovind ţinta cu probabilitatea p_i, care este probabilitatea ca ţinta să fie atinsă.

1) Se aplică formula (1) şi avem

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

2) Notînd cu A_i evenimentul care constă în faptul că ţinta a fost atinsă de trăgătorul $i (i = 1, 2)$, evenimentul A, ţinta a fost atinsă rezultă din

$$A = A_1 \cup A_2$$

deci

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \tag{3}$$

şi ţinînd seamă că evenimentele A_1, A_2 sînt independente, rezultă

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2), \tag{4}$$

deci probabilitatea respectivă p este

$$p = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2$$

3) Probabilitatea ca ţinta să nu fie atinsă de trăgătorul i este $1 - p_i$ iar probabilitatea ca ţinta să nu fie atinsă de niciun trăgător este

$$(1 - p_1)(1 - p_2) \ldots (1 - p_n)$$

Ţinînd seama de raţionamentul făcut la problema 4, probabilitatea P ca ţinta să fie atinsă de cel puţin unul dintre cei n trăgători este

$$P = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \ldots (1 - p_n)$$

Observaţii

a) Dacă $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$, atunci

$$P = 1 - (1 - p)^n$$

b) din egalitatea precedentă rezultă că dacă n este suficient de mare, ţinta este atinsă.

c) Se poate determina n, astfel ca

$$P > \lambda, \qquad 0 < \lambda < 1$$

650. Să se calculeze probabilitatea $P(A)$ dacă se cunosc probabilităţile

$$P_B(A) = \frac{1}{6}, \qquad P_B(A) - P_{\bar{B}}(A) = \frac{5}{6} \; P_A(B) = \frac{2}{3} \tag{5}$$

— Avem

$$P(A \cap B) = P(A) \, P_A(B) = P(B) \, P_B(A),$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \, P_{\bar{B}}(A) = P(A) \, P_A(\bar{B}),$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$P(A) = \frac{P(B)\, P_B(A)}{P_A(B)}, \tag{6}$$

$$P(A) = \frac{P(\bar{B})\, P_{\bar{B}}(A)}{P_A(\bar{B})} \tag{7}$$

Ţinînd seama de (5) în (6), (7) rezultă

$$P(A) = \frac{P(B) \cdot \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{P(B)}{4} \tag{6'}$$

$$P(A) = \frac{P(\bar{B}) \cdot \frac{5}{6}}{P_A(\bar{B})} \tag{7'}$$

Dar (5)

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$$

deci (6'), (7') se scriu

$$P(A) = \frac{P(B)}{4} = \frac{5}{2}[1 - P(B)]$$

Astfel

$$P(B) = \frac{10}{11}, \quad P(A) = \frac{5}{22}$$

651. Doi trăgători trag asupra aceleiaşi ţinte; primul trăgător loveşte ţinta de 7 ori din 10 trageri, iar cel de al doilea de 4 ori din 10 trageri. După tragere se constată că ţinta a fost atinsă numai de un trăgător. Care este probabilitatea ca ţinta să fi fost atinsă de primul trăgător?

— Fie evenimentele

A: ţinta a fost atinsă de un singur trăgător,
A_1: ţinta a fost atinsă numai de primul trăgător,
A_2: ţinta atinsă numai de cel de al doilea trăgător,
A_3: cei doi trăgători nu lovesc ţinta,
A_4: ţinta atinsă de amîndoi trăgătorii.

Dacă ţinem seama de formula lui Bayes, avem

$$P_A(A_1) = \frac{P(A_1)\, P_{A_1}(A)}{P(A_1)\, P_{A_1}(A) + P(A_2)\, P_{A_2}(A)}$$

Dar

$$P(A_1) = (0,7) \cdot (0,6) = 0,42$$

$$P(A_2) = (0,4) \cdot (0,3) = 0,12$$

$$P_{A_1}(A) = 1; \quad P_{A_2}(A) = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$P_A(A_1) = \frac{0{,}42}{0{,}42 + 0{,}12} = \frac{7}{9}$$

care reprezintă probabilitatea căutată.

652. O urnă conține 4 bile albe și 3 negre; se efectuează 3 extracții succesive. Notăm cu X variabila aleatoare care dă numărul bilelor albe extrase.

Se cere funcția de repartiție $F(x)$ pentru această variabilă aleatoare, în cazul cînd bila extrasă se pune în urnă după fiecare extracție și în cazul cînd bila extrasă nu se pune înapoi în urnă.

1) *Bila extrasă se pune înapoi în urnă.*

Distribuția respectivă este

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ P_3(0) & P_3(1) & P_3(2) & P_3(3) \end{pmatrix}$$

unde

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad p = \frac{4}{7}; \quad q = \frac{3}{7}, \quad n = 3,$$

deci

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \left(\frac{3}{7}\right)^3 & 3\left(\frac{3}{7}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right) & 3\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)^2 & \left(\frac{4}{7}\right)^3 \end{pmatrix}$$

Funcția de repartiție este

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k<x} P_3(k) \tag{8}$$

Astfel

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \geqslant x \\ P_3(0), & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ P_3(0) + P_3(1), & \text{dacă } 1 < x \leqslant 2 \\ P_3(0) + P_3(1) + P_3(2), & \text{dacă } 2 < x \leqslant 3 \\ 1 & \text{dacă } x > 3 \end{cases}$$

2) *Bila extrasă nu se reîntoarce în urnă.*

Distribuția variabilei aleatoare respectivă este

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ P_3(0, 3) & P_3(1, 2) & P_3(2, 1) & P_3(3, 0) \end{pmatrix}$$

unde

$$P_k(r, s) = \frac{C_a^r C_b^s}{C_{a+b}^k}, \quad r + s = k, \quad a = 4, \quad b = 3, \quad k = 3$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{C_4^0 C_3^3}{C_7^3} & \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} & \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} & \frac{C_4^3 C_3^0}{C_7^3} \end{pmatrix}$$

iar (8)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ P_3(0,3), & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ P_3(0,3)+P_3(1,2) & \text{dacă } 1 < x \leqslant 2 \\ P_3(0,3)+P_3(1,2)+P_3(2,1) & \text{dacă } 2 < x \leqslant 3 \\ 1 & \text{dacă } x > 3 \end{cases}$$

653. Se dă funcția

$$f(x)=\begin{cases} e^{-a^2x}, & \text{pentru } x \geqslant 0 \\ 0 \quad , & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$$

Să se determine constanta a, ca funcția respectivă să fie o densitate de probabilitate.

— Din condiția

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

avem

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x}\,dx = -\frac{e^{-a^2x}}{a^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a^2} = 1 \to a = \pm 1$$

Deci

$$a = \pm 1.$$

654. Se dă variabila aleatoare X cu următoarea funcție de repartiție

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & \text{pentru } x < 0 \\ \frac{x}{4}\ , & \text{pentru } 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{x^2}{4}\ , & \text{pentru } 1 \leqslant x < 2 \\ 1\ , & \text{pentru } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Se cere

1) $P[1 \leqslant X < 2]$, $P[1 \leqslant X < 2 \mid 1 \leqslant X < 3]$
2) densitatea de probabilitate.
3) dispersia.

Scanned with OKEN Scanner

— Se aplică formulele

$$P[a \leqslant X < b] = F(b) - F(a),$$

$$f(x) = F'(x)$$

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1) $P[1 \leqslant X < 2] = F(2) - F(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

2) $P[1 \leqslant X < 2/1 \leqslant X < 3] = \frac{P[1 \leqslant X < 2]}{P[1 \leqslant X < 3]} = \frac{\frac{3}{4}}{F(3) - F(1)} = \frac{3/4}{3/4} = 1$

2) $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{x}{2}, & \text{dacă } 1 \leqslant x < 2 \\ 0, & \text{dacă } x \geqslant 2 \end{cases}$

3) Dispersia rezultă din relația

$$D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Dar

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{x^2}{4}\, dx + \int_1^2 \frac{x^3}{2}\, dx = \frac{47}{24}$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{x}{4}\, dx + \int_1^2 \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{31}{24}$$

Deci

$$D^2(X) = \frac{47}{24} - \frac{31}{24} = \frac{2}{3}.$$

Plan ed. 5423. Apărut 1975. Bun de tipar 11.8.1975.
Tiraj 17.680 Coli tipar 25.

Tiparul executat sub comanda nr. 1065 la Intreprinderea Poligrafică „13 Decembrie 1918" str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97, București, Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner